Der pythagoräische Lehrsatz

Stammt der Satz des Pythagoras wirklich von Pythagoras?

Vorwissenschaftliche Arbeit verfasst von

Michaela Haumer

Klasse 8A

Betreuer: OStR Mag. Josef Treml

Februar 2015

BG/BRG Zwettl

3910 Zwettl, Gymnasiumstraße 1

Abstract

Der pythagoräische Lehrsatz ist einer der wichtigsten Sätze der Mathematik. Um das zu verdeutlichen, soll die Arbeit einen Überblick über die historische Entwicklung des Satzes geben. Im Zuge dessen stellt sich heraus, dass der pythagoräische Lehrsatz nicht, wie zuerst angenommen, von Pythagoras stammt, sondern dass er bereits Jahrhunderte vor Pythagoras bekannt war. Auch die weitverbreitete Annahme, dass der erste Beweis des Satzes von Pythagoras stammen soll, ist sehr zweifelhaft, da der Beweis, der angeblich von Pythagoras stammen soll, erst bei Euklid festgehalten ist. Man geht also davon aus, dass dieser Beweis von Euklid stammt und Euklid den Satz einfach nach Pythagoras benannt hat. Außerdem ist ein Beweis aus dem alten China überliefert, der viel älter ist als der Beweis von Pythagoras bzw. Euklid. Es haben sich auch viele weitere Mathematiker mit diesem Satz beschäftigt und so existieren heute 371 Beweise. Einige von diesen werden in der Arbeit thematisiert und erklärt. Schon die Durchführung mancher Beweise lässt erkennen, dass der pythagoräische Lehrsatz in vielen Bereichen der Mathematik zum Tragen kommt. Deshalb befasst sich die Arbeit zum Schluss mit einigen Anwendungsbeispielen. Hierbei wird gezeigt, dass dem pythagoräischen Lehrsatz sogar in der Integralrechnung eine Bedeutung zukommt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der pythagoräische Lehrsatz ist einer der bedeutendsten Sätze der Mathematik. Aufgrund seines Namens wird sofort angenommen, dass dieser Satz vom griechischen Mathematiker Pythagoras stammt. Die Arbeit zeigt jedoch, dass das äußerst umstritten ist, da dieser Satz schon lange vor Pythagoras´ Lebzeiten bei den Ägyptern und Babyloniern bekannt war. Pythagoras soll den Lehrsatz allerdings als Erster bewiesen haben, aber auch das wird angezweifelt. Die erste Aufzeichnung dieses Beweises stammt aus Euklids Werk „Elemente“, weshalb man annimmt, dass Euklid diesen Beweis geführt hat und anschließend den Satz nach Pythagoras benannt hat. Es existiert allerdings auch ein Beweis aus dem alten China, der rund 1100 vor Christus geführt worden ist. Dieser gilt als der älteste bekannte Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in 4 große Kapitel. Im ersten Kapitel wird der pythagoräische Lehrsatz definiert. Im zweiten Kapitel gebe ich einen groben Überblick über die Geschichte des pythagoräischen Lehrsatzes mit seinen Anfängen in Mesopotamien bis hin zu den Griechen, von denen auch der berühmteste Beweis des Satzes stammt. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit einigen der insgesamt 371 bekannten Beweise. Dabei werden sowohl klassische Beweise, wie der euklidische Beweis, als auch neuere, wie der Beweis mithilfe der Differenzialrechnung, behandelt. Dieses Kapitel soll einen Überblick über die Vielfalt der verschiedenen Beweise geben. Es können nicht alle Beweise behandelt werden, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Zum Schluss werde ich die Bedeutung und Verwendung des Lehrsatzes durch diverse Anwendungsbeispiele herausarbeiten. Auch hierbei wird nur eine kleine Auswahl an Beispielen behandelt.

Das Buch „The Pythagorean Theorem“ von Eli Maor bietet die wichtigsten Informationen über den pythagoräischen Lehrsatz (Maor Eli, The Pythagorean Theorem). Die meisten zusätzlichen Informationen habe ich mir aus dem Internet oder verschiedenen Schulbüchern geholt. Die Arbeit ist daher eine literaturgestützte Arbeit.

2 Definition

Der pythagoräische Lehrsatz ist folgendermaßen definiert: In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats. Die mathematische Formel dafür lautet: $a^2 + b^2 = c^2$, wobei a und b die Katheten und c die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks sind. Das Wort „Kathete“ kommt vom Griechischen „kathetos“, was „das Herabgelassene“ bedeutet. Die Katheten schließen den rechten Winkel ein und die Hypotenuse liegt gegenüber vom rechten Winkel. „Hypotenuse“ kommt ebenfalls aus dem Griechischen, und zwar von „hypo“ und „teino“, was „das sich darunter erstreckende“ bedeutet. Die Hypotenuse ist immer die längste Seite im Dreieck. Die Winkelsumme beträgt stets 180°, wobei der rechte Winkel 90° hat und sich die übrigen 90° auf die anderen beiden Winkel aufteilen. Somit gibt es im Dreieck einen rechten Winkel und zwei spitze Winkel. Im Falle eines gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecks haben diese beiden Winkel jeweils 45°.

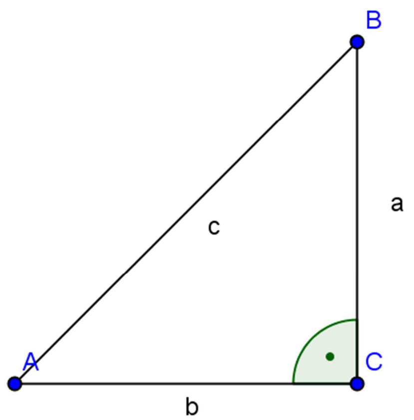

Abb. 1 Rechtwinkeliges Dreieck

3 Geschichte des pythagoräischen Lehrsatzes

3.1 Mesopotamien


Abb. 2 YBC 7289

Die ersten Zeugnisse über eine Vorform des pythagoräischen Lehrsatzes stammen aus Mesopotamien um 1800 vor Christus. Mesopotamien war das Gebiet zwischen den beiden Flüssen Euphrat und Tigris, die im heutigen Irak liegen. Viele Tontafeln wurden dort aus der damaligen Zeit gefunden. Die bedeutendste für die weitere Mathematik, im speziellen für den pythagoräischen Lehrsatz, ist die Tafel namens „YBC 7289“. Es stellte sich heraus, dass die Striche auf dieser Tontafel Zahlen darstellen. Die Babylonier verwendeten nämlich das Sexagesimalsystem, also ein Zahlensystem mit der Basis 60. Die Einerstellen wurden durch vertikale ypsilonähnliche Striche und Zehnerstellen durch vertikale Striche dargestellt. So lässt sich feststellen, dass die Zahl links oben 30 ist und die andere Zahl unter der horizontalen Diagonale ins Dezimalsystem übersetzt 1,414213 ist, also $\sqrt{2}$ auf hundert Tausendstel genau. Diese Zahl mit 30 multipliziert ergibt die Zahl, die noch weiter unten auf der Tontafel steht, nämlich 42,426389. Daraus kann man schließen, dass schon die Babylonier den Zusammenhang zwischen der Diagonale d und den Seitenlängen a in einem Quadrat gekannt haben. Wir haben heute dafür die Formel $d = a\sqrt{2}$. Daher müssen sie auch schon den pythagoräischen Lehrsatz gekannt haben, zumindest den Spezialfall für die Berechnung einer Diagonale in einem Quadrat, nämlich dass $d^2 = 2a^2$ gilt.

Ein weiteres bedeutendes Fundstück aus dieser Zeit ist eine Liste mit verschiedenen pythagoräischen Tripeln, wie zum Beispiel 3, 4, 5 oder 8, 15, 17. Jedes dieser Tripel stellt natürlich gemäß dem pythagoräischen Lehrsatz ein rechtwinkeliges Dreieck dar.

Angle	Petit côté (a)	Hypoténuse (c)	Ligne
[1 59 *] 15	1 59	2 49	1
[1 56 56] 58 14 50 6 15	56 7	3 12 1	2
[1 55 7] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
[1 53] 10 [*] 29 32 52 16	3 31 49	5 9 1	4
[1] 48 54 1 40	1 5	1 37	5
[1] 47 6 41 40	5 19	8 1	6
[1] 43 11 56 28 26 40	38 11	59 1	7
[1] 41 33 59 3 45	13 19	20 49	8
[1] 38 33 36 36	9 1	12 49	9
[1] 35 10 2 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 1	10
[1] 33 45	45	1 15	11
[1] 29 21 54 2 15	27 59	48 49	12
[1] 27 [*] 3 45	7 12 1	4 49	13
[1] 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	14
[1] 23 13 46 40	56	53	15

Abb. 3 Plimpton 322

Die hier angegebenen Zahlenwerte sind wieder im Sexagesimalsystem dargestellt. Zum Umrechnen ins Dezimalsystem muss man jeweils die Zahl vor dem Abstand mit 60 multiplizieren und anschließend die Zahl nach dem Abstand addieren. So erhält man beispielsweise für die erste Zeile für a = 119 und c = 169. Durch das Wurzelziehen aus der Differenz der Quadrate dieser Zahlen ($\sqrt{169^2 - 119^2}$) ergibt sich für b der Wert 120. 119, 120 und 169 stellen ein pythagoräisches Tripel dar. In manchen Zeilen ergibt sich allerdings kein pythagoräisches Tripel, wie zum Beispiel in Zeile 9, da für b kein ganzzahliger Wert herauskommt. Daher wird vermutet, dass es sich um einen Schreibfehler handelt und statt der Neun eine Acht stehen soll. Bei den Zahlen in eckigen Klammern handelt es sich überhaupt nur um Vermutungen, da die erste Spalte beim Auffinden der Tafel komplett gefehlt hat.

Man geht davon aus, dass die Babylonier schon den Algorithmus, der erst 1500 Jahre später in Euklids Werk „Elemente“ zum ersten Mal schriftlich festgehalten ist, gekannt haben, um pythagoräische Tripel zu entdecken. Sie kannten nämlich auch schon extrem hohe Tripel, wie zum Beispiel 4601, 4800, 6649.

Ein Algorithmus ist im Allgemeinen ein Rechenverfahren. Der Algorithmus von Euklid besagt Folgendes: „Let u and v be any two positive integers, with u > v; then the three numbers $a = 2uv, b = u^2 - v^2, c = u^2 + v^2$ form a Pythagorean triple” (Maor Eli, The Pythagorean Theorem, S. 11).

3.2 Ägypten

Da die Ägypter auf Papyrus geschrieben haben, sind nur wenige Aufzeichnungen erhalten. Das wichtigste Zeugnis für die Mathematik aus dieser Zeit ist das sogenannte Rhind Papyrus, das aus 84 arithmetischen, geometrischen und algebraischen Problemen besteht. Es wurde um etwa 1650 vor Christus von A´h-mose verfasst, der aber alles von einem älteren Werk abgeschrieben hat, das aus ungefähr 1800 vor Christus stammt. In dieser Schrift werden 84 Probleme Schritt für Schritt gelöst. Obwohl sich 20 von diesen Problemen mit Geometrie und sogar mit Pyramiden im Speziellen befassen, kann man keinen Bezug zum pythagoräischen Lehrsatz finden. Daher geht man davon aus, dass die Ägypter diesen Satz noch nicht gekannt haben. Trotzdem heißt es, dass sie ein Seil mit Knoten verwendet haben, um Entfernungen zu messen und um rechtwinklige Dreiecke zu bilden. Sie haben ein Seil in 12 gleich lange Einheiten geteilt und gewusst, dass ein rechtwinkliges Dreieck entstehen würde, wenn eine Seite aus 3, eine aus 4 und eine aus 5 Teilen besteht. Der Beruf des Seilspanners war durchaus angesehen in dieser Zeit, da es durch das Spannen der Seile möglich war, Gebäude perfekt rechtwinkelig zu errichten. Außerdem konnten auf diese Weise Felder nach Nilüberflutungen neu vermessen werden. Es gibt jedoch keine Beweise, ob die Ägypter wirklich auf diese Weise Dreiecke gebildet haben.

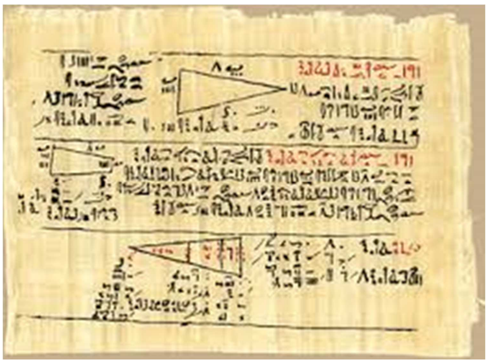

Abb. 4 Rhind Papyrus

3.3 Griechenland

3.3.1 Pythagoras und die Pythagoreer

Pythagoras zählt zu den Naturphilosophen der Vorsokratik und hat von circa 570 bis 510 vor Christus gelebt. Um 530 vor Christus ist er nach Unteritalien gegangen, wo er eine Schule in Kroton eröffnet hat. Da von Pythagoras selbst keine Schriften überliefert sind, gestaltet es sich sehr schwierig, seine Lehre zu rekonstruieren. Es gibt viele Widersprüche, da die meisten Informationen über ihn aus Werken von verschiedenen römischen Autoren stammen. Daher lässt sich nicht genau sagen, welchen Anteil Pythagoras an der Entwicklung der Mathematik hat. Dank seiner vielen Reisen, unter anderem nach Babylonien und Ägypten, sind die Erkenntnisse von diesen Völkern aber überhaupt erst nach Griechenland gekommen. Ob wirklich Pythagoras selbst als erster den pythagoräischen Lehrsatz beweisen konnte, ist zweifelhaft. In vielen Quellen werden jedoch die Pythagoreer als erste Menschen, die den Satz bewiesen haben, geführt. Allerdings ist ein Beweis aus dem alten China aus circa 1100 vor Christus überliefert, wodurch das widerlegt wird. Seinen heutigen Namen erhielt der Satz wahrscheinlich daher, weil Euklid seinen Beweis nach Pythagoras benannt hat, nicht wie oft angenommen, dass Euklid den Beweis des Pythagoras verschriftlicht hat.
Im Zuge der Dreiecksberechnungen haben die Pythagoreer herausgefunden, dass es nicht nur rationale, sondern auch irrationale Zahlen gibt, wie zB. $\sqrt{2}$.

3.3.2 Euklid

Euklid gilt als einer der wichtigsten Mathematiker der Antike. In seinem berühmtesten Werk „Elemente“ hat er das ganze Wissen der griechischen Mathematik, das bis dahin bekannt war, aufgeschrieben. Seine Thesen stützt er vielfach auf Grundsätze des Aristoteles. Es stammen also etliche Sätze nicht von ihm selbst. Er hat sie lediglich aufgeschrieben und genau bewiesen. Seine Art Beweise zu führen, gilt als Vorbild für die Beweisführung der modernen Mathematik. Darunter befindet sich auch ein Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes, der im Kapitel 4.1 genauer behandelt wird. Neben Geometrie hat er sich auch mit Arithmetik und Musiktheorie befasst.

Auch von Euklids Leben ist wenig bekannt. Man geht jedoch davon aus, dass er in Athen geboren worden ist und später dann nach Alexandria gezogen ist, wo er Leiter des mathematischen Instituts der Universität geworden ist.

In seinem Werk „Elemente“ hat er weitere Grundsteine für die Mathematik gelegt. So hat er zB. die Unendlichkeit der Primzahlen bewiesen oder soll einen Algorithmus für pythagoräische Tripel gefunden haben. Dieser ist heute unter dem Namen „Euklidischer Algorithmus“ bekannt. Ob dieser Algorithmus allerdings wirklich von Euklid stammt, ist sehr umstritten, wie es bereits in Kapitel 3.1 näher beschrieben wird.

3.3.3 Archimedes

Auch über Archimedes´ Leben ist sehr wenig bekannt. Er soll die meiste Zeit seines Lebens in Syrakus auf Sizilien gelebt haben. Ihm ist es gelungen diverse physikalische Phänomene zu beschreiben, wie zB. die Hebelgesetze. Aber auch im Bereich der Mathematik schreibt man ihm einige Erkenntnisse zu. So hat er die Kreiszahl π am genauesten berechnet, obwohl bereits vor ihm die Babylonier und Ägypter diese Zahl angenähert hatten. Wie er die Zahl π genau berechnet hat, wird in Kapitel 5.8 ausgeführt.

4 Beweise

Der pythagoräische Lehrsatz ist bisher 371 Mal bewiesen worden und gilt daher als meistbewiesener Satz der gesamten Mathematik. E. S. Loomis hat alle Beweise gesammelt und dann in einem Buch veröffentlicht. Die Beweise stammen sowohl von großen Mathematikern, wie Euklid oder Ptolemäus, als auch von Dichtern oder Politikern. Hans Christian Andersen hat sogar einen Beweis in Gedichtform verfasst. Dadurch werden die Wichtigkeit und die Bedeutung dieses Satzes deutlich. Einige Beweise wurden sogar von Schülern und Studenten durchgeführt. Manche Beweise sind auf einfachste Weise geführt, sodass man nicht einmal mathematische Kenntnisse braucht, um den Beweis zu verstehen.

Man kann die Beweise nach der Art der Vorgehensweise klassifizieren. So gibt es etwa Flächenteilungsbeweise, Ergänzungsbeweise, Scherungsbeweise und Beweise, die mit Ähnlichkeiten arbeiten.

4.1 Euklidischer Beweis

Euklid hat sich in seinem Werk „Elemente“ auch mit dem pythagoräischen Lehrsatz befasst und ihn durch einen Beweis untermauert. Ob der Beweis von Pythagoras stammt oder nicht, ist ungeklärt. Daher nimmt man an, dass Euklid den Beweis durchgeführt hat, ihn aber nach Pythagoras benannt hat. Dieser Beweis gilt daher als wichtigster und berühmtester Beweis dieses Satzes.

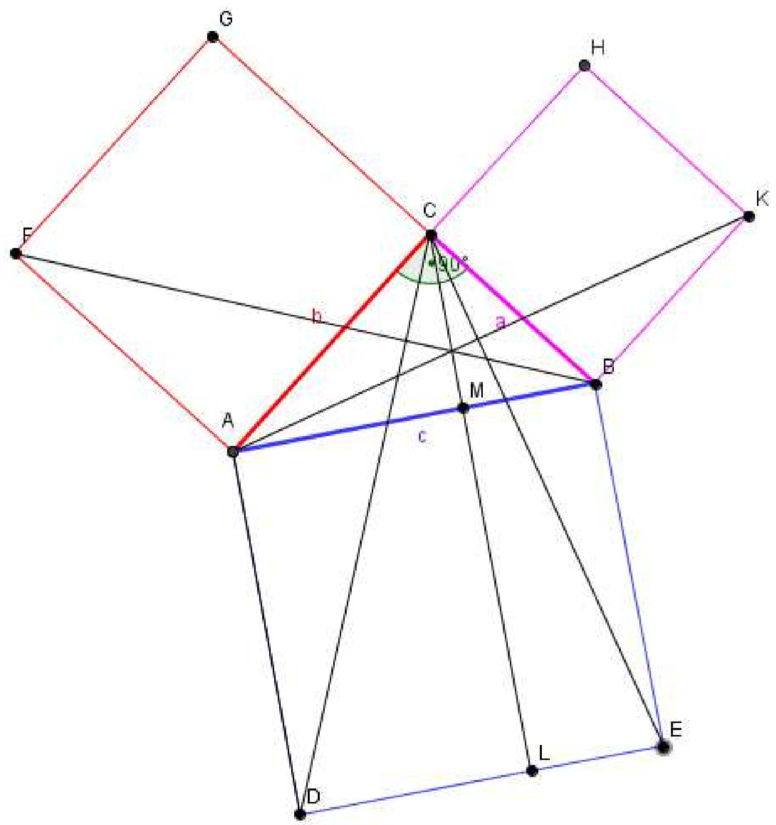

Abb. 5 Euklidischer Beweis

Sei ABC ein rechtwinkeliges Dreieck, wobei der rechte Winkel beim Eckpunkt C liegt. Über jede Seite des rechtwinkeligen Dreiecks zeichnet man dann ein Quadrat und erhält die Quadrate ABED, ACGF und BKHC. Als nächstes konstruiert man eine Parallele zur Strecke $\overline{AD}$ durch den Punkt C und bezeichnet den Schnittpunkt dieser Parallele mit der Seite $\overline{AB}$ mit M und den Schnittpunkt mit der Seite $\overline{DE}$ mit L. Der Punkt A schließt in jedem der beiden angrenzenden Quadrate, nämlich ACGF und ADEB, einen rechten Winkel ein. Also erhält man den Winkel $\sphericalangle$CAD durch Addition von 90° und dem

Winkel ∢CAB, den Winkel ∢FAB erhält man ebenfalls durch Addition des rechten Winkels und dem Winkel ∢CAB. Also sind die Winkel ∢CAD und ∢FAB gleich groß.

Anschließend zeichnet man die Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{CD}$ ein. Die Dreiecke ΔABF und ΔACD müssen den gleichen Flächeninhalt haben, da jeweils zwei Seiten, nämlich $\overline{AD}$ bzw. $\overline{AB}$ und $\overline{AF}$ bzw. $\overline{AC}$, gleich lang sind und die eingeschlossenen Winkel ∢FAB und ∢CAD gleich groß sind. Daher gilt $A_{ABF} = A_{ACD}$. Das Quadrat ACGF ist doppelt so groß wie das Dreieck ΔABF, da sie die Seite $\overline{AF}$ gemeinsam haben und die andere Seite des Quadrates, nämlich $\overline{AC}$, die Höhe des Dreiecks ΔABF ist. Somit gilt $A_{ACGF} = 2.A_{ABF}$.

Das Rechteck ADLM ist doppelt so groß wie das Dreieck ΔACD, da sie die Seite $\overline{AD}$ gemeinsam haben und die andere Seite des Rechtecks ADLM, $\overline{DL}$, die Höhe des Dreiecks ΔACD ist. Also gilt $A_{ADLM} = 2.A_{ACD}$.

Da die Dreiecke ΔABF und ΔACD den gleichen Flächeninhalt haben, folgt daraus dass das Quadrat ACGF und das Rechteck ADLM ebenfalls denselben Flächeninhalt haben müssen und somit gleich groß sind.

Um zu zeigen, dass auch das Quadrat BKHC und das Rechteck BELM gleich groß sind, geht man folgendermaßen vor: Zuerst verbindet man die Eckpunkte C und E, sowie A und K. Die Dreiecke ΔABK und ΔCEB haben denselben Flächeninhalt, da jeweils zwei Seiten, nämlich $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BE}$ und $\overline{BK}$ bzw. $\overline{BK}$ gleich lang und die eingeschlossenen Winkel ∢ABK und ∢CBE gleich groß sind. Dass die beiden Winkel gleich groß sind, erhält man dadurch: Der Eckpunkt B schließt in den beiden angrenzenden Quadraten BKHC und BADE jeweils einen rechten Winkel ein. Also erhält man den Winkel ∢ABK, indem man 90° zu den Winkel ∢ABC addiert. Den Winkel ∢CBE erhält man ebenfalls durch Addition von 90° und dem Winkel ∢ABC. Also gilt zusammenfassend: $A_{ABK} = A_{CBE}$.

Das Quadrat BKHC ist doppelt so groß wie das Dreieck ΔABK, da sie eine gemeinsame Seite, nämlich $\overline{BK}$, haben und die andere Quadratseite $\overline{BC}$ die Höhe des Dreiecks ist. Daher gilt: $A_{BKHC} = 2.A_{ABK}$.

Das Rechteck BELM ist doppelt so groß wie das Dreieck ΔCBE, da sie die Seite $\overline{BE}$ gemeinsam haben und die andere Seite des Rechtecks, nämlich BM, die Höhe des Dreiecks ist. Also gilt $A_{BELM} = 2.A_{CBE}$.

Weil die Dreiecke ΔABK und ΔCBE flächengleich sind, müssen auch das Quadrat BKHC und das Rechteck BELM den gleichen Flächeninhalt haben.
Anhand der Zeichnung sieht man, dass das Quadrat ADEB aus den beiden Rechtecken ADLM und BELM besteht. Setzt man für diese Rechtecke das oben Erklärte ein, erhält man $A_{ADEB} = A_{ACGF} + A_{BKHC}$. Die Conclusio von Euklid ist daher „ Also ist das Quadrat über der Seite $\overline{BC}$ den Quadraten über den Seiten $\overline{BA}$, $\overline{AC}$ zusammen gleich.“ (Kaiser Hans u.a., Geschichte der Mathematik, S. 163)

Dieser Beweis wurde 1938 von Ann Condit erweitert. Sie war damals 16 Jahre alt und studierte an der Central Junior-Senior High School in South Bend im Bundesstaat Indiana in den USA. Dies ist der erste Beweis, bei dem alle Hilfslinien und alle Dreiecke vom Mittelpunkt der Hypotenuse ausgehen, also dem Punkt P.

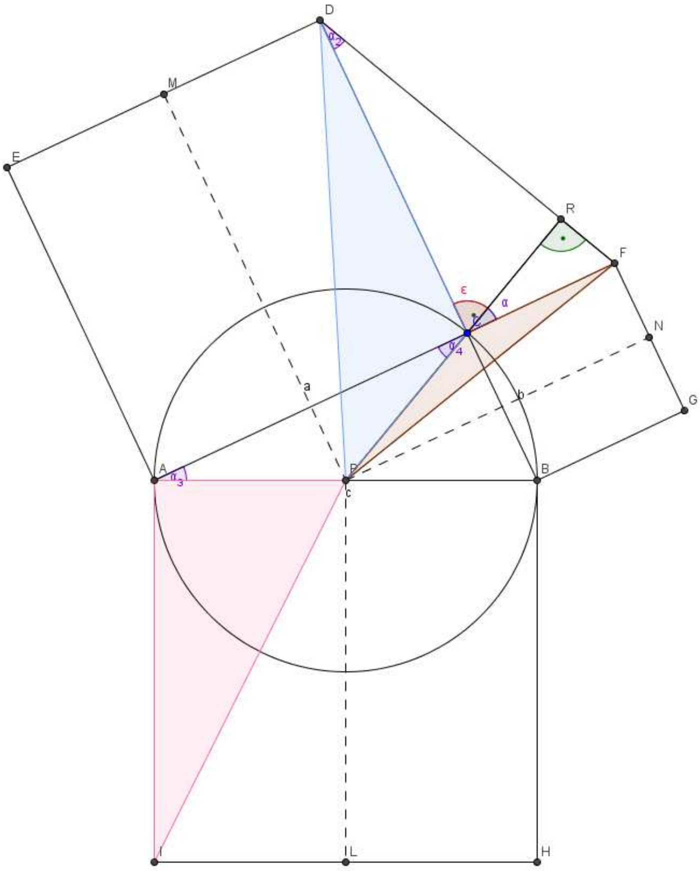

Abb. 6 Ann Condit´s Beweis

Das hier rot hinterlegte Dreieck ΔPFC = $\frac{\overline{FC}.\overline{FN}}{2}$, wobei $\overline{FC}$ die Grundlinie ist und $\overline{FN}$ die Höhe. Da der Punkt N der Halbierungspunkt der Seite $\overline{FG}$ ist, kann man $\overline{FN}$ mit $\frac{\overline{FG}}{2}$ anschreiben. Im Quadrat sind alle Seiten gleich lang, also gilt: $\overline{FG} = \overline{FC}$, daher ist $\frac{\overline{FG}}{2} = \frac{\overline{FC}}{2}$. Daraus folgt, dass $\Delta PFC = \frac{\overline{FC^2}}{4}$. FC^2 ist der Flächeninhalt des ganzen Quadrats BCFG und somit ist $\Delta PFC = ¼(BCFG)$. Genauso geht man auch bei den beiden übrigen Dreiecken vor und erhält dann für $\Delta PDC = ¼(ACDE)$ und für $\Delta PAI = ¼(ABHI)$. Im nächsten Schritt verwendet man die Tatsache, dass sich zwei Dreiecke mit gleicher Basis so verhalten wie ihre Höhen.

Daher gilt: $(\Delta PDC + \Delta PFC) : \Delta PAI = (\overline{DR} + \overline{RF}) : \overline{AI}$. Addiert man die beiden Strecken $\overline{DR}$ und $\overline{RF}$ erhält man die Strecke $\overline{DF}$.

Also gilt weiter $\overline{DF} : \overline{AI} = \overline{AB} : \overline{AB} = 1$. Nun setzt man für ΔPDC wieder ¼ (ACDE), für ΔPFC ¼.(BCFG) und für ΔPAI ¼.(ABHI) ein. Der Faktor ¼ wird jetzt nicht mehr berücksichtigt und so erhält man $(ACDE + BCFG) : ABHI = 1$. Formt man die Gleichung um, indem man mit ABHI multipliziert, erhält man ACDE + BCFG = ABHI, also $a^2 + b^2 = c^2$.-

Ann Condit baut in ihren Beweis auch den Thaleskreis ein. Laut Thales sind alle Dreiecke, die in einen Halbkreis eingeschrieben werden können, rechtwinkelige Dreiecke. Auf diesem Weg wird bewiesen, dass es sich bei dem Dreieck wirklich um ein rechtwinkeliges Dreieck handelt.

4.2 Ptolemäischer Beweis

Ptolemäus gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike. Natürlich hat auch er sich mit dem pythagoräischen Lehrsatz beschäftigt und ist zu einem Ergebnis gekommen, das heutzutage als „Satz des Ptolemäus“ bekannt ist:

In einem Sehnenvieleck ist das Produkt der Diagonallängen gleich der Summe der Produkte der Längen der gegenüberliegenden Seiten.

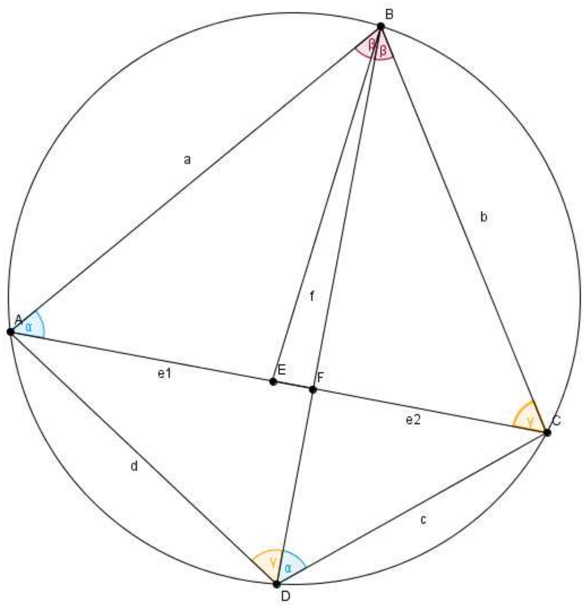

Abb. 7 Ptolemäischer Beweis

Um das zu beweisen, geht man folgendermaßen vor: Zuerst trägt man den Winkel ∢CBD ein, der in der Zeichnung rot hinterlegt ist. Dann zeichnet man denselben Winkel an der Seite a ein. Nun schneidet man den Schenkel dieses Winkels mit der Seite e und erhält einen neuen Punkt, nämlich E. Der Peripheriewinkelsatz besagt Folgendes: „Alle Peripheriewinkel in der gleichen Halbebene über dem gleichen Kreisbogen sind gleich groß.“ (http://www.mathepedia.de/Peripheriwinkelsatz.aspx, zugegriffen am 07.12.2014, um 14:00 Uhr)

Man konstruiert einen Kreis, in den man eine Sehne $\overline{AB}$ einzeichnet, die aber kein Durchmesser sein darf. Nun ist der Kreisbogen in zwei Hälften geteilt. Anschließend zeichnet man entweder mehrere Punkte auf der oberen oder auf der unteren Hälfte des Kreisbogens ein. In dieser Zeichnung sind vier Punkte auf der oberen Hälfte eingetragen. Jeden dieser Punkte S_1,S_2, S_3 und S_4 verbindet man mit den Punkten A und B. Durch Nachmessen kann man kontrollieren, dass all diese Winkel gleich groß sind. Außerdem lässt sich feststellen, dass die Peripheriewinkel genau halb so groß sind wie der Zentriwinkel, der zur Sehne gehört. Der Zentriwinkel wird in der Zeichnung mit ε bezeichnet und stellt den Winkel ∢AMB dar.

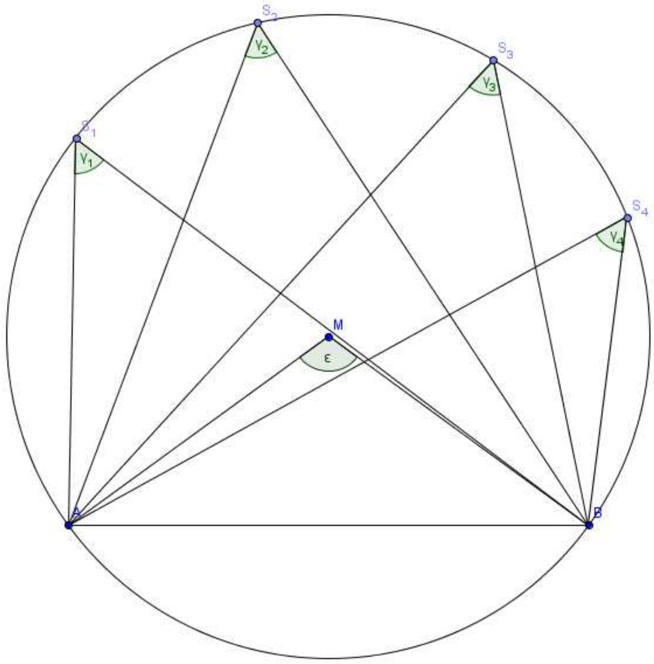

Abb. 8 Peripheriewinkelsatz

Daher gilt für die Abbildung 7, die Konstruktion für den ptolemäischen Beweis, dass die Winkel ∢BCA und ∢BDA, wie auch ∢BAC und ∢BDC jeweils gleich groß sind. Daher sind auch die Dreiecke ΔBAE und ΔBDC ähnlich. Man kann also ihre Seiten in Beziehung setzen und erhält diese Gleichung: $f\,:\,c = a\,:\,e_1$.

Des Weiteren sind auch ΔBCE und ΔABD ähnliche Dreiecke, da sie den Winkel γ und den Winkel β + Winkel ∢EBF gemeinsam haben. Setzt man die Seiten dieser Dreiecke in ein Verhältnis, erhält man folgende Gleichung: $f \, : \, d = b \, : \, e_2$.
Durch Multiplikation vom Zähler der linken Seite mit dem Nenner der rechten Seite und Multiplikation vom Nenner der linken Seite mit dem Zähler der rechten Seite erhält man dann diese beiden Terme: $f.e_1 = a.c$ und $f.e_2 = \ b.d$.

Um die Strecke $\overline{AC}$ zu erhalten, addiert man e_1 und e_2, $e.f$ ist dann also $(e1 \ + \ e2)f$. Daraus ergibt sich dann: $e.f \ = \ a.c \ + \ b.d$, wobei e.f das Produkt der Diagonalen und $a.c + b.d$ die Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten darstellt.

Wenn ABCD im Spezialfall ein Rechteck ist, kann man es in 2 rechtwinkelige Dreiecke zerteilen. Außerdem gilt dann: $\overline{AB}$ = $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ = $\overline{DA}$ und $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$. Setzt man das in das Ergebnis des ptolemäischen Satzes ein, erhält man $\overline{AC}^2$ = $\overline{AB}^2$ + $\overline{BC}^2$.-

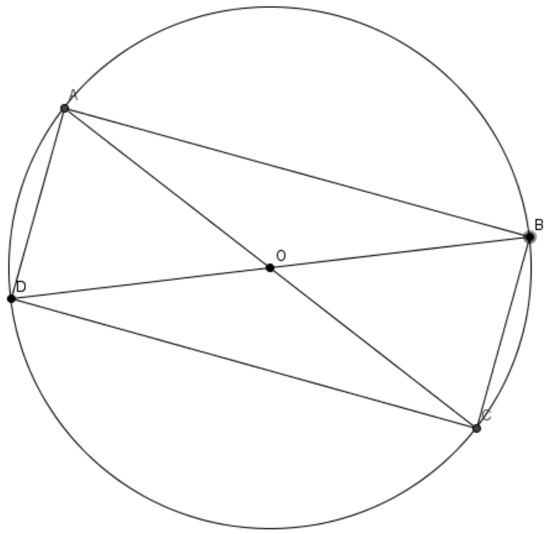

Abb. 9 Spezialfall des ptolemäischen Beweises

4.3 Chinesischer Beweis

Einer der ältesten Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes stammt aus China. Er soll ca. 1100 v. Chr. durchgeführt worden sein. Damals war natürlich noch nicht von Pythagoras die Rede. Dieser Beweis ist erstaunlich leicht zu führen und man braucht fast kein mathematisches Wissen. Erstaunlich ist daher nur, dass die Chinesen diese Idee für einen Beweis gehabt haben und nicht die Griechen, obwohl die Griechen in Mathematik viel gebildeter gewesen sind. In einigen Büchern wird dieser Beweis jedoch als Beweis der Pythagoreer geführt.

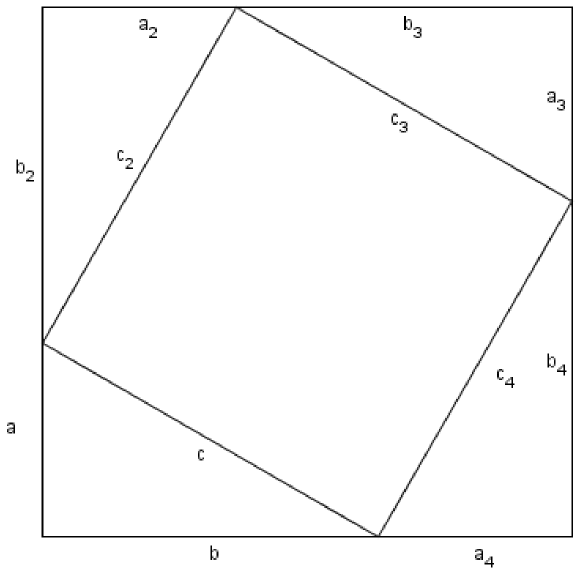

Abb. 10 Chinesischer Beweis Teil 1

Hier sieht man vier rechtwinkelige Dreiecke mit den Seiten a,b und c. Die Seiten a und b schließen jeweils den rechten Winkel ein. Man reiht sie so aneinander, dass man ein Quadrat erhält mit den Seitenlängen $a + b$. Anschließend verbindet man die Teilungspunkte jeder Seite miteinander. Ein Teilungspunkt befindet sich immer dort, wo die Seite a oder die Seite b aufhört. Wenn man sie verbunden hat, entsteht in der Mitte wieder ein Quadrat, das als Hypotenusenquadrat bezeichnet wird, da die Seiten des Quadrats jeweils die Hypotenusen der rechtwinkeligen Dreiecke sind.

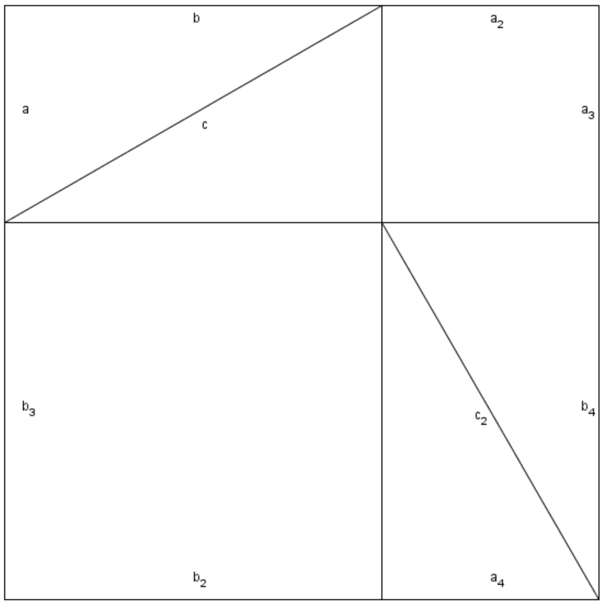

Abb. 11 Chinesischer Beweis Teil 2

In dieser Abbildung zeichnet man wieder vier Mal dieselben rechtwinkeligen Dreiecke, man ordnet sie jedoch anders an. Dieses Mal entsteht kein Hypothenusenquadrat, sondern Quadrate über den beiden Katheten. Da die Flächeninhalte der beiden großen Quadrate gleich groß sind und die rechtwinkeligen Dreiecke ihre Größe nicht verändern, lässt sich daraus schließen, dass das Hypothenusenquadrat gleich groß sein muss wie die beiden Kathetenquadrate, also gilt $a^2 + b^2 = c^2$.-

4.4 Beweis basierend auf Rotation

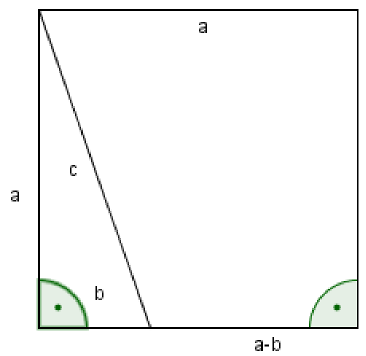

Abb. 12 Rechtwinkeliges Dreieck in einem Quadrat

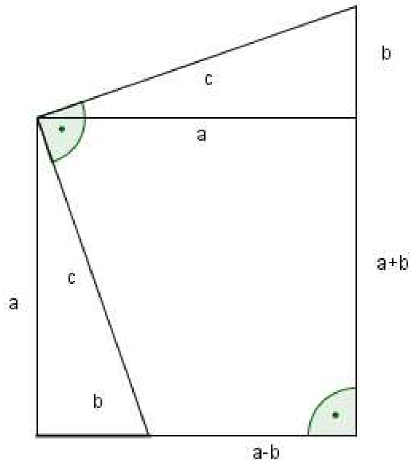

Abb. 13 Quadrat mit gedrehtem rechtwinkeligem Dreieck

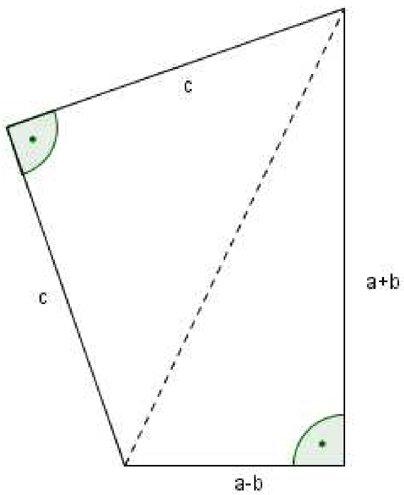

Abb. 14 Vieleck

Ausgehend vom rechtwinkeligen Dreieck ΔABC konstruiert man ein Quadrat, das als Seitenlänge a aufweist und das rechtwinkelige Dreieck beinhaltet. Danach dreht man dieses Dreieck um 90° gegen den Uhrzeigersinn und setzt es an die oberste Kante des Quadrats. Dann löscht man das Originaldreieck und erhält somit eine viereckige Figur, die den gleichen Flächeninhalt hat wie das Quadrat in Abbildung 12. Da es sich in dem Viereck um 2 rechtwinkelige Dreiecke handelt, kann man den Flächeninhalt mit

$\frac{c^2}{2} + \frac{(a - b)(a + b)}{2}$ ausrechnen. Den Flächeninhalt des Quadrats in Abbildung 12 kann man ganz einfach mit a^2 berechnen. Da diese beiden Flächeninhalte gleich groß sind, kann man die beiden Formeln gleichsetzen und erhält $a^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{(a - b)(a + b)}{2}$. Nun rechnet man den Ausdruck in den Klammern aus, multipliziert die ganze Gleichung mit 2 und erhält schließlich $a^2 + b^2 = c^2$.-

4.5 Beweis durch Differentialrechnung

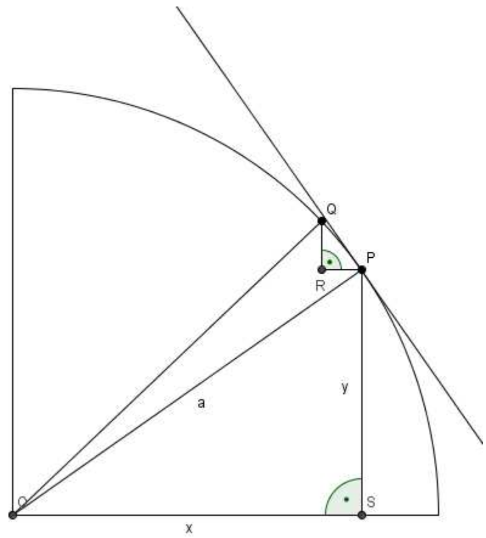

Abb. 15 Beweis mithilfe der Differentialrechnung

Hier ist ein Viertelkreis gezeichnet mit Mittelpunkt O und Radius a. Die Punkte P und Q liegen auf dem Kreis. P hat die Koordinaten x und y, Q x - dx und y + dy, wobei dx und dy unendliche kleine Zahlen beschreiben. Wenn P entlang des Kreises Richtung Q wandert, entsteht das Dreieck ΔQRP. Dieses Dreieck ist dem Dreieck ΔOSP fast ähnlich, jedoch je näher P Q kommt, desto ähnlicher werden sich die beiden Dreiecke. Korrekt mathematisch lässt sich das so darstellen: $\lim_{P \to Q}(\Delta QRP) \sim \Delta OSP$. Daraus bekommen wir, dass $\overline{QR} : \overline{RP} = \overline{OS} : \overline{SP}$ gilt. $\overline{OS}$ hat den gleichen Wert wie die x-Koordinate vom Punkt P, $\overline{SP}$ hat den gleichen Wert wie die y-Koordinate von P, $\overline{QR} = dy$ und $\overline{RP} = -dx$. Setzt man diese Werte in die vorhergehende Gleichung ein, erhält man $\frac{dy}{-dx} = \frac{x}{y}$. Wenn man jeweils den Zähler der einen Seite mit dem Nenner der anderen Seite multipliziert, kommt man zur Differenzialgleichung $xdx + ydy = 0$ mit der allgemeinen Lösung $x^2 + y^2 = c$, wobei c die zunächst noch unbestimmte Integrationskonstante ist. Diese Integrationskonstante erhält man, indem man $x = 0$ setzt. Das ist der Fall, wenn sich der Punkt P ganz oben am Kreis befindet. Da $y = a$ gilt, erhält man dann die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$. (vgl. Maor Eli, The Pythagorean Theorem, S. 111 ff.)

5 Bedeutung und Verwendung

Die Bedeutung des pythagoräischen Lehrsatzes für die gesamte Mathematik ist unumstritten. Nicht nur in der Trigonometrie spielt der Satz eine wichtige Rolle, sondern er findet auch in der Differentialrechnung oder bei den Kegelschnitten Verwendung.

5.1 Ebene Figuren

Um eine Diagonale in einem Quadrat ausrechnen zu können, wendet man den pythagoräischen Lehrsatz an, d = a$\sqrt{2}$. Selten bedenkt man dabei, dass sich diese Formel aus $d^2 = a^2 + a^2$ herleitet.

Man kann auch den Abstand von zwei Punkten im kartesischen Koordinatensystem mit diesem Satz ausrechnen. Angenommen, die beiden Punkte mit den Koordinaten $(x_0|y_0)$ und $(x_1|y_1)$ liegen auf einer Ebene. Da die Koordinatenachsen senkrecht auf einander stehen, berechnet man den Abstand c der beiden Punkte so:

$c\ = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

Diese Formel kann in unendlich viele Dimensionen erweitert werden. Somit gilt im Allgemeinen für die Berechnung des euklidischen Abstandes:

$d(x, y)\ = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$

5.2 Höhensatz

Der Höhensatz basiert ebenfalls auf dem pythagoräischen Lehrsatz. Er lautet: „Das Quadrat der Höhe ist gleich dem Produkt aus den beiden Hypotenusenabschnitten.“ (http://www.paukert.at/mathe/pythagoras.pdf, Seite 9, zugegriffen am 09.12.2014, um 16:00 Uhr)

Er besagt also, dass $h^2 = x.y$ gilt. Durch die Höhe h wird das rechtwinkelige Dreieck in 2 ähnliche rechtwinkelige Dreiecke ΔACF und ΔCBF geteilt. Die Ähnlichkeit ergibt sich daraus, weil beide Dreiecke einen rechten Winkel einschließen und sogar beide die Winkel α und β beinhalten. Daher müssen auch die jeweiligen Seitenverhältnisse gleich groß sein. $\overline{AF} : \overline{FC} = \overline{FC} : \overline{BF}$, oder $x : h = h : y$. Nun formt man diese Gleichung nach h um und erhält: $h^2 = x.y$.-

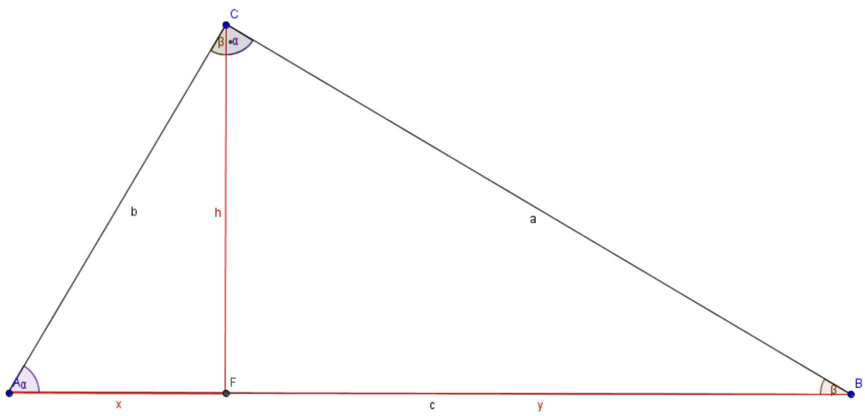

Abb. 16 Höhensatz

5.3 Kathetensatz

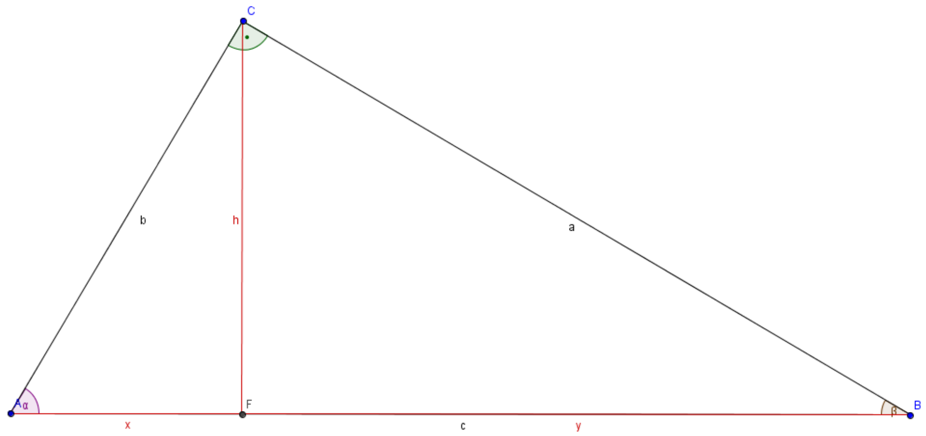

Abb. 17 Kathetensatz

Der Kathetensatz besagt: „Das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Produkt aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt.“ (http://www.paukert.at/mathe/pythagoras.pdf, Seite 9, zugegriffen am 08.12.2014, um 16:00 Uhr)

In mathematischen Formeln ausgedrückt bedeutet das, dass $a^2 = c.y$ und $b^2 = c.x$ gilt. Und so lassen sie sich herleiten: Die Dreiecke ΔABC und ΔCBF sind ähnlich, da sie jeweils einen rechten Winkel aufweisen und den Winkel β gemeinsam haben. Wegen der Ähnlichkeit müssen auch die jeweiligen Seitenverhältnisse gleich groß sein: $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{FB}$, also $c : a = a : y$. Formt man die Gleichung um, erhält man: $a^2 = c.y$.- Dies wird als erster Kathetensatz bezeichnet.

Um den zweiten Kathetensatz zu erhalten, führt man denselben Beweis für die Dreiecke ΔABC und ΔACF. Auch diese Dreiecke sind einander ähnlich, da sie wiederum beide einen rechten Winkel aufweisen und beide den Winkel α enthalten. Die Seiten der Dreiecke verhalten sich so: $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AF}$, also $c : b = b : x$. Nach Umformung erhält man folgende Gleichung: $b^2 = c.x$.-

5.4 Einheitskreis

Auch in Bezug auf den Einheitskreis spielt der pythagoräische Lehrsatz eine Rolle. Wie es der Name „Einheitskreis“ schon andeutet, ist der Radius dieses Kreises eine Einheit lang. Zeichnet man in diesen Kreis ein rechtwinkeliges Dreieck ein, kann man die entsprechenden Sinus- und Cosinuswerte des jeweiligen Winkels ablesen. Der Cosinuswert lässt sich in der x – Richtung und der Sinuswert in der y- Richtung ablesen. Die Hypotenuse in diesem Dreieck ist der Radius, der ja im Einheitskreis 1 ist.
Also gilt: $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$

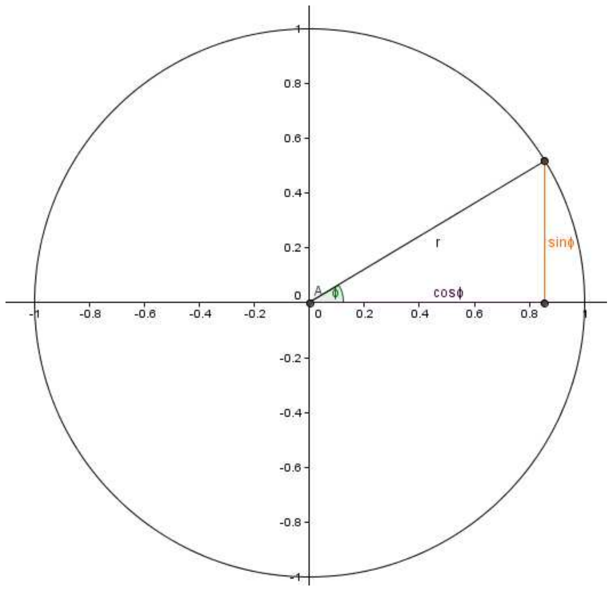

Abb. 18 Einheitskreis

5.5 Cosinussatz

Der Cosinussatz gilt als eine Verallgemeinerung des pythagoräischen Lehrsatzes, um ihn in allen Dreiecken anwenden zu können.

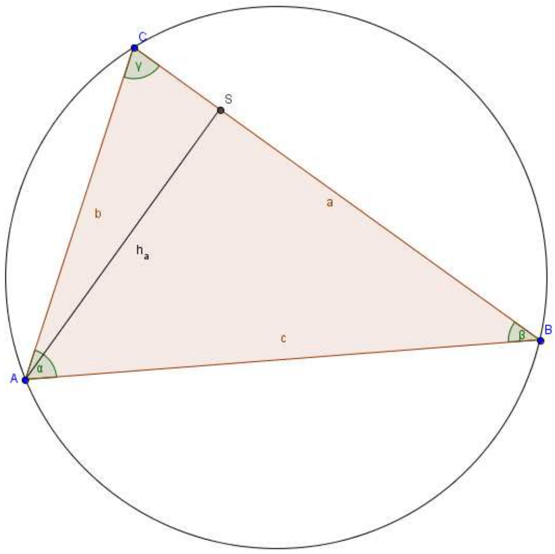

Abb. 19 Cosinussatz

Man konstruiert ein beliebiges Dreieck und zeichnet die Höhe auf die Seite a ein. Dadurch erhält man zwei rechtwinkelige Dreiecke, ΔABS und ΔASC. Nach dem pythagoräischen Lehrsatz gilt in ΔABS: $c^2 = \overline{BS}^2 + ha^2 \Leftrightarrow ha^2 = c^2 - \overline{BS}^2$. Im Dreieck ΔASC gilt: $b^2 = \overline{SC}^2 + ha^2 \Leftrightarrow ha^2 = b^2 - \overline{SC}^2$. Da die linke Seite bei beiden Gleichungen h_a ergibt, müssen die beiden rechten Seiten das gleiche Ergebnis liefern. Daher kann man sie gleichsetzen: $c^2 - \overline{BS^2} = b^2 - \overline{SC^2}$. Man formt die Gleichung um, zu $c^2 = b^2 + \overline{BS}^2 - \overline{SC^2}$. Wie auch in der Zeichnung zu erkennen ist, ergibt $\overline{BS} + \overline{SC}$ die Seite a. In weiterer Folge setzt man daher in die Gleichung für $\overline{BS}$ $a - \overline{SC}$ ein und erhält: $c^2 = b^2 + \left(a - \overline{SC}\right)^2 - \overline{SC^2}$.

Im nächsten Schritt löst man die Klammer auf: $c^2 = b^2 + a^2 - 2a.\overline{SC} + \overline{SC}^2 - \overline{SC}^2$. Das $\overline{SC}^2$ hebt sich auf und man erhält: $c^2 = b^2 + a^2 - 2a.\overline{SC}$.

Da man mit dem Ausdruck nicht weiterrechen kann, ersetzt man $\overline{SC}$ durch einen Ausdruck mit Cosinus. $\overline{SC}$ ist im Dreieck ΔASC vom Winkel γ die Ankathete und die Seite b die Hypotenuse. Da der Cosinus gleich $\frac{Ankathete}{Hypothenuse}$ ist, erhält man: $cos\gamma = \frac{\overline{SC}}{b}$.

Daraus folgt weiter: $\overline{SC} = \mathrm{b.cos\gamma}$.

Setzt man das in die Gleichung von oben ein, kommt man zu dem Ausdruck $c^2 = b^2 + a^2 - 2a.b.cos\gamma$. Um die Gleichungen für a^2 und b^2 zu erhalten, muss man diese Formel zyklisch vertauschen. Das bedeutet, dass man jede Dreiecksgröße durch die nächste in alphabetischer Reihenfolge ersetzt. Dieses Verfahren muss man anwenden, wenn man Winkel und Seiten von ebenen Dreiecken in Beziehung setzt. Nur so rechnet man mit richtigen Verhältnissen weiter. Man erhält nach zyklischer Vertauschung:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.cos\alpha$ und $b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.cos\beta$.

Der pythagoräische Lehrsatz ist demnach ein Spezialfall des Cosinussatzes. Wenn γ = 90° gilt und man in die Gleichung $c^2 = b^2 + a^2 - 2a.b.cos\gamma$ einsetzt, erhält man $c^2 = a^2 + b^2$, da $\cos 90 = 0$ gilt.

5.6 Kegelschnitte

Auch bei der Berechnung und Darstellung verschiedener Kegelschnitte wendet man den pythagoräischen Lehrsatz an. So beruht die Kreisgleichung auf diesem Satz, aber auch die Berechnung der Brennweite bei der Ellipse und die Berechnung der linearen Exzentrizität bei der Hyperbel.

5.6.1 Kreis

Eine mögliche Form der Darstellung eines Kreises lautet: $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$, wobei x und y die Koordinaten eines Punktes auf der Kreislinie und x_m und y_m die Koordinaten des Mittelpunktes sind. Befindet sich der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung, der Mittelpunkt hat also die Koordinaten (0|0), ergibt sich für den sogenannten Ursprungskreis die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$. Voraussetzung für diese Gleichungen ist jeweils ein Dreieck im Kreis, das die Katheten $(x - x_m)$ und $(y - y_m)$ und die Hypotenuse r aufweist. Mithilfe des pythagoräischen Lehrsatzes kommt man also zur Kreisgleichung.

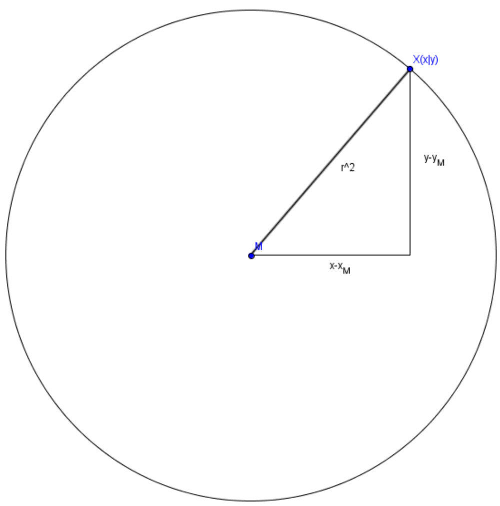

Abb. 20 Kreis

5.6.2 Ellipse

Die Definition einer Ellipse lautet: „Für die Punkte X einer Ellipse gilt: Die Summe der Abstände zu den Brennpunkten ist stets 2a.“ (Brand Clemens u.a., Thema Mathematik 7, S. 148).

Der eine Brennpunkt F_1 hat die Koordinaten (e|0), der andere Brennpunkt F_2 hat die Koordinaten (-e|0), wobei e die Brennweite bzw. die lineare Exzentrizität bedeutet. Diese kann wiederum mit dem pythagoräischen Lehrsatz berechnet werden:

$e^2 = a^2 - b^2$. In dieser Formel steht a für die Hälfte der Hauptachse $\overline{AB}$ und b für die halbe Nebenachse $\overline{CD}$.

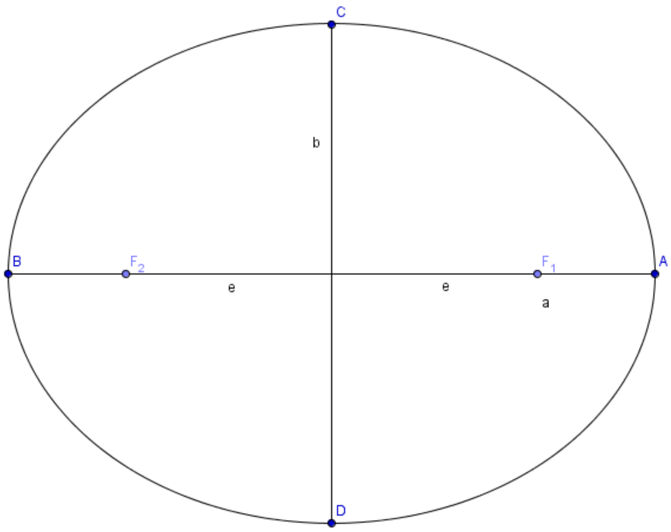

Abb. 21 Ellipse

5.6.3 Hyperbel

Man spricht von einer Hyperbel, wenn folgender Satz gilt: „Die Differenz der Abstände zu den Brennpunkten ist (je nach Ast) $\pm$ 2a.“ (Brand Clemens u.a., Thema Mathematik 7, S. 152). Wie bei der Ellipse haben auch die Brennpunkte bei der Hyperbel die Koordinaten (e|0) und (-e|0). Diese kann mithilfe des pythagoräischen Lehrsatzes in Form von $e^2 = a^2 + b^2$ berechnet werden, wobei a für die große Halbachse und b für die kleine Halbachse steht. Die Punkte A und B auf der Hyperbel werden als Hauptscheitel bezeichnet und haben die Koordinaten (a|0) und (-a|0). Die Nebenscheitel C und D haben als Koordinaten (0|b) und (0|-b).

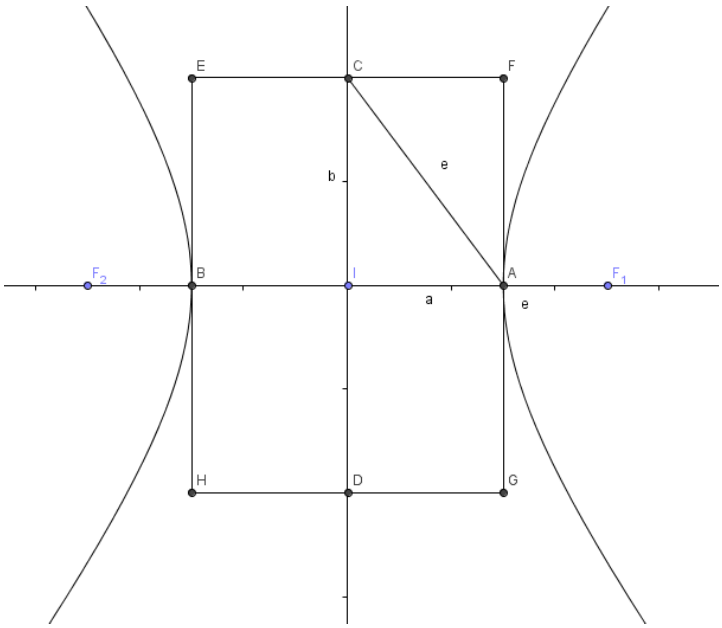

Abb. 22 Hyperbel

5.7 Integralrechnung

Um den Abstand zwischen zwei Punkten auf einer geraden Linie berechnen zu können, hat schon Euklid die Abstandsformel geprägt. Für die Berechnung von Abständen von Punkten auf Kurven gibt es kein elementares Rechenverfahren. Um die Fläche unter einer Kurve ausrechnen zu können, haben Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibnitz unabhängig voneinander die Integralrechnung um 1670 entwickelt. Sie gilt als wichtigste Erkenntnis seit Euklids Buch „Elemente“, das fast 2000 Jahre davor erschienen ist.

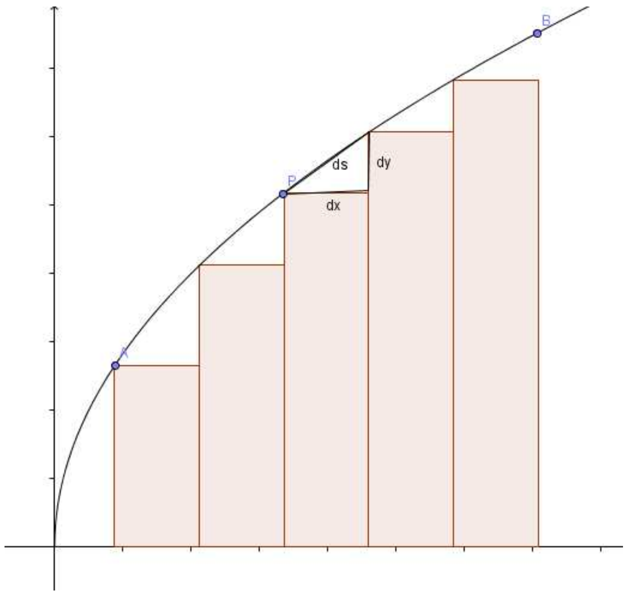

Abb. 23 Untersummen

Um die Länge der Kurve berechnen zu können, schreibt man der Kurve Rechtecke ein und unterteilt somit den Graphen der Kurve in lauter gerade Abschnitte, wobei jeder Abschnitt die Hypotenuse eines Dreiecks darstellt mit den Seiten dx und dy. Wenn die Unterteilung klein genug ist, entspricht ds ungefähr dem Wert der Bogenlänge zwischen den zwei gewählten Punkten. Macht man die Unterteilung immer feiner, so werden dx und dy auch immer kleiner und daher gilt: $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Dieser Ausdruck ist als pythagoräischer Lehrsatz der Differenzialrechnung bekannt. Löst man diese Gleichung nach ds, erhält man $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Das wiederum ist gleichzusetzen mit $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. Die gesamte Bogenlänge s ist die unendliche Summe von allen ds Werten. Diese Summe kann man über das bestimmte Integral berechnen: $s = \int_b^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. Da $y = f(x)$ die Gleichung für die Kurve ist, steht $\frac{dy}{dx}$ für y´. Nun setzt man das in die Gleichung ein und erhält folgendes Ergebnis: $s = \int_b^a \sqrt{1+y'^2}\,dx$.

5.8 Berechnung von π

Die bis dahin genaueste Berechnung der Kreiszahl π ist Archimedes mithilfe des pythagoräischen Lehrsatzes gelungen. Um die Zahl π zu berechnen, hat er den Kreis quadratisch gemacht, indem er in und um den Kreis Vielecke gezeichnet hat, die als eingeschriebene und umgeschriebene Vielecke bezeichnet werden. Er hat Vielecke mit immer mehr Seiten konstruiert. Somit ist der Umfang der Vielecke im Kreis immer größer geworden und der Umfang der Vielecke außerhalb des Kreises immer kleiner. Schließlich hat er den Wert von π eingrenzen können, nämlich π muss zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\,\frac{10}{70}$liegen.

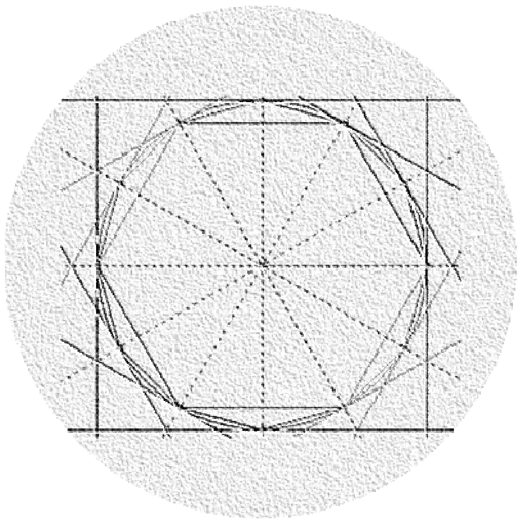

Abb. 24 Graphische Annäherung von π

Zu sehen ist ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 1. In den Kreis wird ein Vieleck mit n Seiten eingeschrieben, von dem eine Seite durch die Strecke $\overline{AB}$ repräsentiert wird. Das Vieleck muss jedoch jeweils n gleiche Seiten und n gleiche Winkel aufweisen. S_n ist die Länge einer Seite. Die Strecke $\overline{OC}$ steht normal auf die Seite $\overline{AB}$ und wird dann um $\overline{CD}$ verlängert, damit sie den Kreis berührt. Der Punkt D halbiert die Länge von A nach B auf der Kreislinie. Daher sind $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ Seiten eines Vielecks mit 2n Seiten. Die Seiten von diesem Vieleck werden mit s_{2n} bezeichnet.

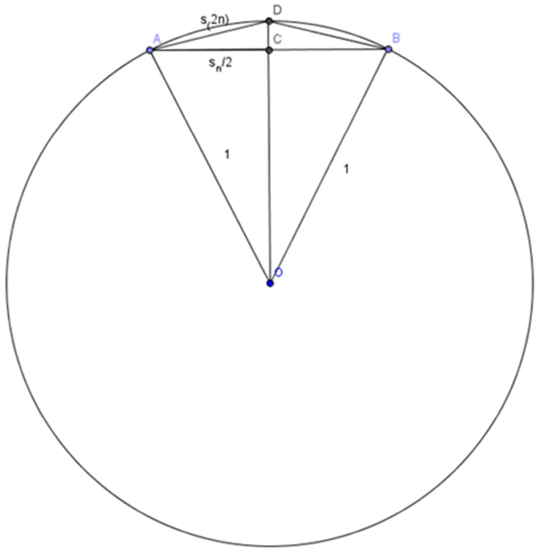

Abb. 25 Vieleck im Kreis

Wendet man im Dreieck ΔACD den pythagoräischen Lehrsatz an, erhält man: $\overline{AD}^2$ = $\overline{AC}^2$ + $\overline{CD}^2$. Weiter gilt: $\overline{CD}$ = $\overline{OD}$ – $\overline{OC}$. Setzt man das in die vorhergehende Gleichung ein, erhält man: $\overline{AD}^2$ = $\overline{AC}^2$ + ($\overline{OD}$ – $\overline{OC}$)^2.

Im Dreieck ΔACO gilt: $\overline{OC}$ = $\sqrt{\overline{OA^2} - \overline{AC^2}}$. Das setzt man in die erste Gleichung ein und erhält $\overline{AD}^2$ = $\overline{AC}^2$ + ($\overline{OD}$ - $\sqrt{\overline{OA^2} - \overline{AC^2}}$)^2.

$\overline{OD}$ = $\overline{OA}$ = 1, da durch diese Strecken der Radius beschrieben wird und dieser 1 ist. $\overline{AC} = \frac{s_n}{2}$ und $\overline{AD} = s_{2n}$. Das setzt man wieder in die vorhergehende Gleichung ein.

Man erhält also folgende Gleichung: $s_{2n}^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + \left[1 - \sqrt{\left[1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2\right]}\,\right]^2$.

Umgeformt ergibt sich für diese Formel: $s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}$. Um s_{2n} zu erhalten, muss man auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und erhält $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$.

Zuerst zeichnet Archimedes in den Kreis ein Sechseck. Hierbei ist jede Seite eine Einheit lang. Für ein Zwölfeck ist jede Seite $\sqrt{2-\sqrt{4-1}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, für ein Vieleck mit 24 Seiten $\sqrt{2-\sqrt{4-(2-\sqrt{3})}} = \sqrt{2-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}$. Für ein Vieleck mit 96 Seiten gilt daher: $s_{96} = \sqrt{2-\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}}$. Um den Umfang dieses Vielecks zu erhalten multipliziert man s_{96} mit 96. Anschließend dividiert man das Ergebnis durch 2, um π zu erhalten, da π die Hälfte des Umkreises ist. Man erhält

$$s_{96} = 48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \approx 3{,}14103, \text{ also ungefähr } 3\,\tfrac{10}{71}.$$

Dieses Verfahren wendet Archimedes auch für umgeschriebene Vielecke an. Die Formel, die er dafür verwendet, kann man mithilfe des pythagoräischen Lehrsatzes wiederum beweisen.

$\overline{AB}$ ist die Seite eines Vielecks. Die Mitte dieser Strecke liegt bei C und außerdem berührt die Seite in diesem Punkt den Kreis, also ist ∢OCB = 90°. Anschließend verlängert man die Seite $\overline{OC}$ so lange, bis sie das Quadrat im Punkt E berührt. Da $\overline{OD}$ normal auf $\overline{ED}$ und $\overline{BC}$ normal auf $\overline{EC}$ steht, müssen die Winkel ∢EOD und ∢EBC gleich groß sein. Daher sind die beiden Dreiecke ΔEOD und ΔEBC einander ähnlich. Aufgrund dieser Ähnlichkeit gilt weiter: $\overline{ED} : \overline{OD} = \overline{EC} : \overline{BC}$.

$\overline{EC} = \overline{OE} - \overline{OC} = \sqrt{\overline{OD^2} + \overline{ED^2}} - \overline{OC}$. Weil $\overline{ED} = \frac{sn}{2}$ und $\overline{OC} = \overline{OD} = 1$ gilt, erhält man: $\sqrt{1^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} - 1$. Nun setzt man das in die Formel für das Verhältnis der Seiten ein unter der Bedingung, dass $\overline{BC} = \frac{sn}{2}$ gilt.

Daraus resultiert: $\left(\frac{s_n}{2}\right) : 1 = \left(\sqrt{1^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} - 1\right) : \left(\frac{s_{2n}}{2}\right)$.

Nun formt man die Gleichung so um, dass s_{2n} alleine auf der linken Seite steht und erhält schließlich diese Formel: $s_{2n} = \frac{2\sqrt{4+s_n^2}-4}{s_n}$.

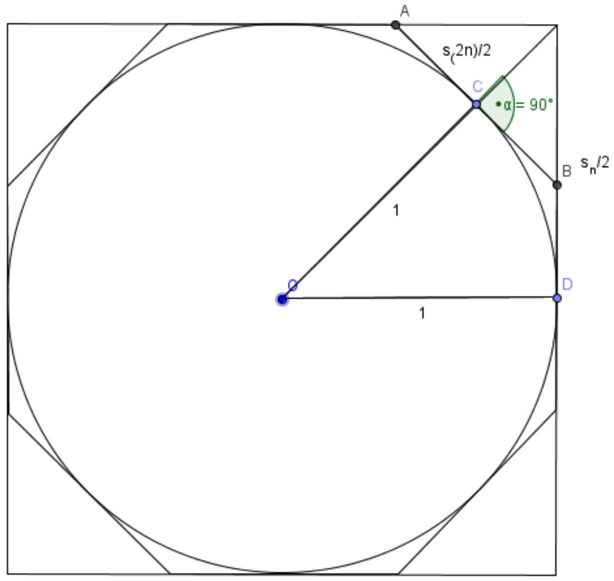

Abb. 26 Vieleck um Kreis

Für ein Sechseck gilt: Das Dreieck ΔOAB ist gleichseitig, weshalb $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} = s_6$ gilt. Im rechtwinkeligen Dreieck ΔOAC gilt: $\overline{OA^2} = \overline{OC^2} + \overline{AC^2}$. OC ist 1, AC ist $\frac{s_6}{2}$ und $\overline{OA}$ ist s_6, also folgt: ${s_6}^2 = 1^2 + \left(\frac{s_6}{2}\right)^2$. Durch Umformung dieser Gleichung erhält man: $s_6 = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$. Dieses Ergebnis setzt Archimedes wieder in die Formel $s_{2n} = \frac{2\sqrt{4+s_n^2}-4}{s_n}$ ein. Er wiederholt den Vorgang einige Male, bis er bei s_{96} angelangt ist. Um π annähern zu können, muss man das jeweilige Ergebnis wieder mit n, also in dem Fall mit 96, multiplizieren und anschließend durch 2 dividieren. Dann erhält man für π den Wert 3,14271, also ungefähr 3 $\frac{10}{70}$.

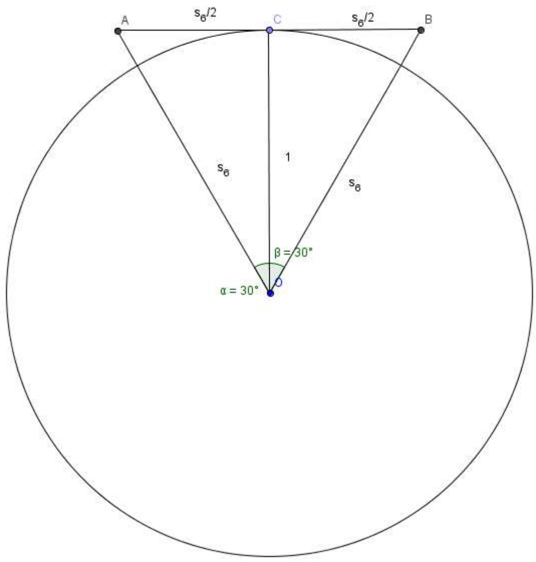

Abb. 27 Sechseck um Kreis

So hat Archimedes herausgefunden, dass π zwischen 3,14103 und 3,14271 liegen muss. Heute weiß man, dass π eine unendliche, nicht periodische Dezimalzahl ist, angenähert als π = 3,141592654…

No. of sides	Area of inscribed polygon	Area of circum-scribed poly.	
6	2.598076	3.464102	
12	3.000000	3.215390	
24	3.105829	3.159660	
48	3.132629	3.146086	
96	3.139350	3.142715	← Archimedes stopped here.
180	3.140955	3.141912	
360	3.141433	3.141672	
720	3.141553	3.141613	
1440	3.141583	3.141598	
2880	3.141590	3.141594	
5760	3.141592	3.141593	

Abb. 28 Näherungswerte für π

6 Fazit

Diese Arbeit zeigt, dass der pythagoräische Lehrsatz nicht von Pythagoras stammt, da der Satz in einer Vorform schon um 1800 vor Christus bei den Mesopotamiern bekannt war. Auch die Annahme, dass der erste Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras stammt, wird in dieser Arbeit verneint. Der erste überlieferte Beweis stammt bereits aus China aus ca. 1100 vor Christus. Der Beweis des Lehrsatzes, der vielfach Pythagoras zugeschrieben wird, ist in einem Werk von Euklid festgehalten. Ob Euklid den Beweis geführt hat und ihn nach Pythagoras benannt hat oder ob die Schüler von Pythagoras den Beweis zuerst geführt haben und Euklid ihn lediglich aufgeschrieben hat, bleibt ungeklärt. Dass dieser Beweis des Satzes von Pythagoras selbst stammt, ist am unwahrscheinlichsten.

Wie bedeutend der Satz für die Mathematik ist, zeigt sich allein an den 371 bekannten Beweisen. Einige sind sogar von berühmten Persönlichkeiten, wie von Ptolemäus, geführt worden. Andere Beweise stammen wiederum von Studenten. Ann Condit hat zB. den Beweis von Euklid weitergeführt, als sie noch studiert hat. Der pythagoräische Lehrsatz spielt zudem nicht nur eine wesentliche Rolle bei der Berechnung von einfachen rechtwinkeligen Dreiecken, sondern auch in weiteren Teilen der Mathematik, wie zB. der Integralrechnung.

Der pythagoräische Lehrsatz ist sogar noch verallgemeinert worden, sodass er in allen Dreiecken anwendbar ist. Dieser Satz wird als Cosinussatz bezeichnet. Aber auch der Kathetensatz und der Hypotenusensatz gelten als Anwendungsbeispiele für den Satz des Pythagoras. Außerdem kann man mithilfe des pythagoräischen Lehrsatzes am Einheitskreis für diverse Winkel ihre dazugehörigen Sinus- und Cosinuswerte berechnen. Und Archimedes hat mithilfe des pythagoräischen Lehrsatzes die Kreiszahl π so genau annähern können wie niemand vor ihm.

7 Literaturverzeichnis

7.1 Printmedien

Brand, Clemens; Dorfmayr, Anita [u.a.]: Thema Mathematik 7. 3. Auflage. Linz: Veritas-Verlag, 2013

Kaiser, Hans; Nöbauer, Wilfried: Geschichte der Mathematik. 2. Auflage. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1998

Maor, Eli: The Pythagorean Theorem. a 4,000-year history. Princeton: Princeton University Press, 2007

Reichel, Hans-Christian; Humenberger, Hans [u.a.] (Hrsg.): Das ist Mathematik 3. Ausgabe für Lehrerinnen und Lehrer. 1. Auflage. Wien: öbv, 2012

Reichel, Hans-Christian; Humenberger, Hans [u.a.] (Hrsg.): Das ist Mathematik 4. 1. Auflage. Wien: öbv, 2012

7.2 Internetquellen

Anderegg Jeremy: Archimedes.

URL: http://www.anderegg-web.ch/phil/archimedes.htm

(zugegriffen am 07.12.2014, um 15:15 Uhr)

AnthroWiki.

URL: http://anthrowiki.at/Pythagoras_von_Samos

(zugegriffen am 23.10.2014, um 14:45 Uhr)

Cut the Knot: Pythagorean Theorem.

URL: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

(zugegriffen am 27.10.2014, um 15:30 Uhr)

Honerkamp, Josef: Was ist ein Algorithmus?

URL: http://www.scilogs.de/die-natur-der-naturwissenschaft/was-ist-ein-algorithmus/ (zugegriffen am 17.08.2014, um 16:00 Uhr)

Internet Publikation für Allgemeine und Integrative Psychotherapie: Beweis und beweisen in Mathematik und Logistik.

URL: http://www.sgipt.org/wisms/gb/beweis/b_mathe.htm

(zugegriffen am 26.10.2014, um 17:30 Uhr)

Koepf, Wolfram: Sinus- und Cosinussatz.

URL:http://www.mathematik.de/ger/fragenantworten/erstehilfe/trigonometrie/sinuscosinussatz/sinuscosinussatz.html

(zugegriffen am 08.12.2014, um 15:00 Uhr)

Landesbildungsserver Baden-Württemberg: Beweis vom Satz des Pythagoras nach Euklid. URL: http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek1/geometrie/pyth/beweise/euklid.html

(zugegriffen am 26.10.2014, um 15:45 Uhr)

Mathe Lexikon.

URL: http://www.mathe-lexikon.at/geometrie/ebene-figuren/dreiecke/satz-des-pythagoras/wissenswertes.html (zugegriffen am 28.10.2014, um 11:30 Uhr)

Mathematica Ludibunda: Der Satz des Pythagoras.

URL: http://mathematica.ludibunda.ch/pythagoras-de6.html (zugegriffen am 13.09.2014, um 15:30 Uhr)

Paukert, Herbert: Der Lehrsatz von Pythagoras und seine Anwendungen.

URL: http://www.paukert.at/mathe/pythagoras.pdf (zugegriffen am 08.12.2014, um 16:00 Uhr)

Sandrock, Jonas: Vom Sechseck zum Zwölfeck.

URL: http://www.logisch-gedacht.de/pi-berechnen/zwoelfeck/ (zugegriffen am 07.12.2014, um 15:30 Uhr)

Steinfeld, Thomas: Peripheriewinkelsatz.

URL: http://www.mathepedia.de/Peripheriwinkelsatz.aspx (zugegriffen am 07.12.2014, um 14:00 Uhr)

Steinfeld, Thomas: Satz von Ptolemäus.

URL: http://www.mathepedia.de/Satz_von_Ptolemaeus.aspx (zugegriffen am 27.10.2014, um 17:00 Uhr)

Universität Würzburg: Ergänzungsbeweis für den Satz des Pythagoras.

URL: http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/pythagoras/site15.html (zugegriffen am 26.10.2014, um 15:00 Uhr)

Wikipedia: Euklid.

URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Euklid (zugegriffen am 07.12.2014, um 15:00 Uhr)

Wikipedia: Satz des Pythagoras.

URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras (zugegriffen am 08.12.2014, um 15:30 Uhr)

8 Abbildungsverzeichnis

Name: Michaela Haumer

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich diese vorwissenschaftliche Arbeit eigenständig angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Rudmanns, 28.01.2015 Michaela Haumer

Ort, Datum Unterschrift

Zustimmung zur Aufstellung in der Schulbibliothek

Ich gebe mein Einverständnis, dass ein Exemplar meiner vorwissenschaftlichen Arbeit in der Schulbibliothek meiner Schule aufgestellt wird.

Rudmanns, 28.01.2015 Michaela Haumer

Ort, Datum Unterschrift