SIR-KARL-POPPER-SCHULE
WIEDNER GYMNASIUM

Vorwissenschaftliche Arbeit im Rahmen der Reifeprüfung

Kombinatorische Untersuchung mehrdimensionaler Entsprechungen platonischer Körper

Valentin Hübner

8D 2014/15

Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium Wien 4
Wiedner Gymnasium/Sir-Karl-Popper-Schule
A-1040 Wien, Wiedner Gürtel 68

Betreuungslehrperson: Prof. MMag. Holger Rud

Vorgelegt am 13. 2. 2015

Abstract

Das Thema dieser Arbeit mit dem Titel „Kombinatorische Untersuchung mehrdimensionaler Entsprechungen platonischer Körper“ erhält seine übergeordnete Bedeutung dadurch, dass es einige der Grundlagen der Polyedrischen Kombinatorik, einer sehr aktuellen Forschungsrichtung, beinhaltet. Die Arbeit befasst sich insbesondere mit der Fragestellung, welche gemeinsamen Eigenschaften sich für gewisse Spezialfälle regulärer abstrakter Polytope finden lassen.

Die Möglichkeit einer vollständigen Aufzählung und expliziten Angabe aller existenten Polytope einiger minderer Ränge wird erörtert. Wo sich diese als nicht möglich herausstellen, wird versucht, Polytope durch charakteristische Eigenschaften formal zu beschreiben. Verschiedene Thesen über Zusammenhänge zwischen diesen Eigenschaften werden überprüft. Zur Behandlung des gestellten Themas werden Polytope durch Halbordnungen modelliert. So kann auf bestehende Methoden der Algebra zurückgegriffen werden, um ihre Struktur zu untersuchen. Des Weiteren wird die kombinatorische Methode des doppelten Abzählens angewandt, um Gleichungen zwischen f-Vektor, Schläfli-Symbol und Fahnenzahl aufzustellen. Die Eindeutigkeit der für niedrige Ränge explizit angegeben Polytope wird gezeigt. Weiters werden für höhere Ränge Zusammenhänge zwischen f-Vektor, Schläfli-Symbol, Eulerscher Charakteristik und der Fahnenzahl σ bewiesen. Schließlich werden unter anderem diese vier genannten Eigenschaften für die wichtigsten Polytopfamilien allgemein ermittelt.

Abstract

This paper's topic owes its overall significance to the fact that it adresses some of the basics of polyhedral combinatorics, a branch of current research. The paper, entitled *On regular abstract polytopes*, is to determine which common properties can be found in certain special cases of abstract polytopes.

The possibility of listing and explicitly defining all existent polytopes of certain minor ranks is discussed. Where this fails, it is tried to describe polytopes by various characteristic properties. Theses about relations between these properties will be verified. For this, polytopes are modelled by partially ordered sets, which allows for the usage of existing algebraic methods. Furthermore, the method of double counting is applied in order to find equations linking f-vector, Schläfli symbol and flag number. The uniqueness of the polytopes specified in minor ranks is shown. For higher ranks, connections between f-vector, Schläfli symbol, Euler characteristic and flag number σ are proved. Finally, these four properties are determined generally for the most important polytope families in all ranks.

Summarium

Significatio superior thematis huius editionis De corporibus multarum dimensionum abstractis et regularibus intitulatæ in fundamentum calculi coniunctionibus corporum, disciplinæ mathematicæ præsentis, tractare sita est. Quæ stiuncula solvenda principalis est: Quæ proprietates communes quorundam casuum specialium corporum multarum dimensionis abstractorum et regularium inveniri possunt?

De possibilitate omnia corpora minorum dimensionum enumerare et specificare dissertatur. Si hoc non est possibile, quibusdam indiciis corpora formaliter describere probatur. Variæ hypotheses de his proprietatibus verificantur. Ad has quæstiunculas tractandum corpora structuræ algebraicæ aspectantur, quomodo rationes algebræ utari licet. Æquationes de f-vectore, symbolo Schlæflii, numeroque vexillorum ad inveniendum ratio bis numerandi adhibetur. Singularitas illorum corporum minorum dimensionum specificatorum atque condiciones inter f-vectorem, symbolum Schlæflii, numerum vexillorum, characterque Euleri demonstrantur. Denique, inter aliæ, hæ quattuor proprietates summarum familiarum corporum determinantur.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

2 Definitionen **9**
2.1 Abstrakte Polytope . . . 9
2.2 Spezielle Namen . . . 10
2.3 Regularität . . . 11

3 Zu untersuchende Eigenschaften **12**
3.1 f-Vektor . . . 12
3.2 Eulersche Charakteristik . . . 12
3.3 Schläfli-Symbol . . . 13
3.4 Fahnenzahl . . . 13

4 Allgemeine kombinatorische Untersuchung **14**

5 Polytope vom Rang zwei und kleiner **16**
5.1 Das Nullpolytop . . . 16
5.2 Die Ecke . . . 16
5.3 Die Kante . . . 16
5.4 Polygone . . . 17

6 Familien **18**
6.1 Simplex . . . 18
6.1.1 Konstruktion . . . 18
6.1.2 Kombinatorische Untersuchung . . . 24
6.2 Ditop . . . 27
6.2.1 Definition . . . 27
6.2.2 Kombinatorische Untersuchung . . . 27
6.3 Hyperkubus . . . 28
6.3.1 Definition . . . 28
6.3.2 Kombinatorische Untersuchung . . . 28
6.3.3 Hemihyperkubus . . . 30
6.3.3.1 Definition . . . 30
6.3.3.2 Kombinatorische Untersuchung . . . 30
6.4 Kreuzpolytop . . . 32
6.4.1 Definition . . . 32
6.4.2 Dualität zum Hyperkubus . . . 32
6.4.3 Kombinatorische Untersuchung . . . 33
6.4.4 Hemikreuzpolytop . . . 34

7 Zusammenfassung **35**

A Quellenverzeichnis **36**

B Abbildungsverzeichnis **37**

Λέγω δή, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

— Εὐκλείδης: Στοιχεῖα, 369f.

Kapitel 1

Einleitung

Θεαίτητος[1] (ca. 417 – 369 v. Chr.) wusste erstmals von den fünf Platonischen Körpern, den regelmäßigen Polyedern. Diese untersuchte er hinsichtlich ihrer einfachsten Eigenschaft: der Anzahlen ihrer Ecken, Kanten und Flächen. Seither wurden zwei wichtige Verallgemeinerungen gefunden. Zunächst, die Erweiterung der dreidimensionalen Polyeder auf Körper beliebiger Dimensionszahl. Neben Polygonen und Polyedern können so auch ihre mehrdimensionalen Entsprechungen, allgemein als Polytope bezeichnet, definiert und untersucht werden. Schließlich, die Verallgemeinerung von geometrischen auf abstrakte Polytope. Anstatt Mengen von Punkten im Euklidischen Raum zu betrachten, wird die Struktur jener Körper algebraisch modelliert. Diese Abstraktion vereinfacht nicht nur jegliche kombinatorischen Überlegungen, sondern erweitert auch die Definition des Polytops um solche, die aufgrund geometrischer Beschränkungen nur in der abstrakten Form auftreten können, auf welche jedoch dieselben Überlegungen angewandt werden können.

In der vorliegenden Arbeit sollen anfänglich für abstrakte reguläre Polytope erneut die ersten Fragen der Antike gestellt werden: Wie viele Ecken haben sie, wie viele Kanten, wie viele Seiten, allgemein wieviele Unterpolytope vom Rang n? Diese Anzahlen bilden den sogenannten f-Vektor. Natürlich ist die gleiche Fragestellung hier weitaus umfassender: Statt der fünf regelmäßigen geometrischen Polyeder werden abstrakte Körper von beliebiger Dimension betrachtet. Weitere Eigenschaften (nämlich die Eulersche Charakteristik, das Schläfli-Symbol und die Fahnenzahl) sollen ebenfalls bestimmt werden, um darauf aufbauend die Untersuchung elementarer Beziehungen zwischen diesen zu ermöglichen, welche den Kern der Arbeit bildet.

In den Kapiteln 2 und 3 werden ausführlich und genau die Definitionen eines abstrakten Polytops sowie der zu untersuchenden Eigenschaften angegeben. Auch in den folgenden Kapiteln finden sich einige Definitionen; dies im Allgemeinen nicht früher als notwendig, doch viele sind für jegliche weitere Behandlung des Themas unerlässlich und müssen daher ganz am Anfang stehen. In Kapitel 4 werden einige allgemeine Beziehungen zwischen jenen Eigenschaften gefunden, die jedoch schnell an ihre Grenze stoßen, nämlich Rang 4. Darum werden daraufhin Spezialfälle von besonderem Interesse betrachtet, für die auch im gegebenen Rahmen darüber hinaus gehende Erkenntnisse gewonnen werden können. Dies sind zunächst alle existenten Polytope vom Rang kleiner gleich 2, welche der Reihe nach aufgezählt und analysiert werden. Anschließend werden die wichtigsten Polytopfamilien allgemein behandelt, welche jeweils zuerst definiert und dann hinsichtlich der genannten Eigenschaften untersucht werden. Besondere Aufmerksamkeit wird dem Simplex, der mit Ausnahme des Ditops (für welches diese Untersuchung auf Trivialitäten reduziert würde) einfachsten Famlie, gewidmet: Exemplarisch wird der vergleichsweise umfangreiche Beweis für die Wohldefiniertheit erbracht, auch alle weiteren Behauptungen, wie die Regularität, werden bewiesen, worauf bei den nachfolgenden Polytopfamilien großteils verzichtet wird.

[1] latinisiert: Theaitetos

Die Kapitel 2 und 3 basieren wesentlich auf den Werken dreier Autoren, sowie Sekundärliteratur zu diesen. Jene sind, erstens, Εὐκλείδης[2] von Alexandria, der Entdecker der Geometrie: Sein größtes Werk, Στοιχεῖα, mündet in den Beweis dafür, dass genau fünf regelmäßige Polyeder existieren, vermutlich eine ursprüngliche Erkenntnis des Θεαίτητος (Εὐκλείδης um 300 v.Chr.). Zweitens, der Brite H.S.M. Coxeter, welcher mit seinem Werk *Regular Polytopes* wesentliche Beiträge zur Polyedertheorie leistete (Coxeter 1948). Drittens schließlich, der deutsche Professor Günther M. Ziegler, dessen *Lectures on Polytopes* ein Standardwerk zu den Grundlagen abstrakter Polytope sind (Ziegler 1995).

In den Kapiteln 4 bis 6 finden sich seltener Zitationen. Die enthaltenen Thesen lassen sich nämlich unabhängig, allein aufgrund der zuvor vorgestellten Theorie (sowie der Kenntnis der fünf platonischen Körper), finden. Die inhaltlichen Aussagen dieser Kapitel werden, wie üblich, als mathematische Sätze formuliert. Wo möglich, folgen Beweise; stellenweise mussten diese zum Zweck der Kürze ausgelassen werden.

Gewiss sind jene Sätze so oder in anderer Form seit Jahrhunderten bekannt; sie liegen schließlich bei den Grundlagen der Polyedrischen Kombinatorik, eines eigenen Zweiges der mathematischen Wissenschaft. Ganz sicher enthält die vorliegende Arbeit also keinerlei neuartige Resultate. Etwas anderes war selbstverständlich von Anfang an undenkbar, jedoch hätte sie ein aktuelleres Thema der Polyedrischen Kombinatorik behandeln können. Die Gründe dafür, dass der Autor sich gegen ein solches entschied sind zwei: Nicht nur würde das verhindern, den kompletten Aufbau der Theorie abstrakter Polytope bis zu jenem Grad, auf dem die gestellten Fragen beantwortet werden, Teil der Arbeit sein zu lassen, sodass diese ohne Vorwissen unverständlich wäre, sondern sie vor allem auch zu einer rein reproduktiven Arbeit machen, wohingegen so immerhin das Alte erneut, vielleicht aber auch auf eine neue Weise gefunden werden kann. Beides, die Vollständigkeit bezüglich der Grundlagen ebenso wie die Produktivität, war dem Autor wichtig. Und sicherlich findet sich, sei es in der Art, wie die Beweise unter Verwendung der Fahnenzahl geführt werden oder in der genauen rekursiven Definition von abstraktem Simplex, Hyperkubus und Kreuzpolytop unter Verwendung der Halbordnung, doch etwas Originalität.

[2] germanisiert: Euklid

Kapitel 2

Definitionen

2.1 Abstrakte Polytope

Polytope werden gewöhnlicherweise als Teilmengen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ definiert, wobei durchaus mehrere zueiander nicht äquivalente Definitionen verwendet werden (vgl. Coxeter 1948: 1). Eine Definition für konvexe Polytope lässt sich hierbei leicht angeben, z. B. als konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten oder als nichtleere Schnittmenge endlich vieler Halbräume (vgl. Pinter 1997: 2); eine allgemeine Definition ist schwieriger. Jedoch soll hier lediglich die Struktur der Polytope betrachtet werden und in dieser gleichen sich beispielsweise alle Fünfecke; es ist daher nur umständlich, zwischen diesen zu unterscheiden. Eben deshalb ist eine abstrakte Definition des Polytops sinnvoll. Zur Unterscheidung werden die derart definierten als *abstrakte Polytope* bezeichnet. Zunächst müssen jedoch einige Begriffe eingeführt werden.

In einer Halbordnung $H = (\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ heißen zwei Elemente $A, B \in \mathcal{M}$ *inzident* (in anderem Zusammenhang sonst *vergleichbar*), wenn $A \preccurlyeq B$ oder $B \preccurlyeq A$, formal geschrieben als $A \nsim B$. Wir schreiben $A \prec B$, falls $A \preccurlyeq B$ und $A \neq B$. Es gilt B *bedeckt* A, formal $A \prec\!\!\cdot\, B$, falls $A \prec B$, aber kein Element C existiert, sodass $A \prec C \prec B$ (vgl. Baron et al. 1992: 12f.).

Eine Untermenge $\mathcal{K}$ von $\mathcal{M}$ heiße *Kette* von H, falls $(\mathcal{K}, \preccurlyeq)$[1] eine Totalordnung ist. Die *Länge* einer Kette ist die Anzahl ihrer Elemente minus eins. Eine Kette, die keine Untermenge einer anderen Kette der Halbordnung H ist, heiße *Fahne* (in anderem Zusammenhang sonst *maximale Kette*).

Eine Halbordnung $(\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ heiße *beschränkt*, falls ein *minimales Element* $\hat{0}$ mit $\hat{0} \preccurlyeq A$ für alle $A \in \mathcal{M}$ und ein maximales Element $\hat{1}$ mit $A \preccurlyeq \hat{1}$ für alle $A \in \mathcal{M}$ existieren. $\mathcal{M} \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$ heißt der *eigentliche Teil* von $\mathcal{M}$.

Eine *Rangfunktion* ist eine Funktion $rang : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ für die gilt

$$A \prec B \Rightarrow rang(A) < rang(B) \qquad \text{und} \qquad A \prec\!\!\cdot\, B \Rightarrow rang(A) + 1 = rang(B).$$

Eine beschränkte Halbordnung $H = (\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ heiße *gradiert*, falls auf $\mathcal{M}$ eine Rangfunktion existiert. Die Existenz einer Rangfunktion ist für beschränkte Halbordnungen H äquivalent dazu, dass alle Fahnen von H dieselbe Länge haben (vgl. Mixer 2009: 2). Diese Länge wird ebenfalls als *Rang* von H bezeichnet. Für $rang(\hat{0}) = 0$ ist der Rang von H gleich $rang(\hat{1})$. Es ist im Zusammenhang mit abstrakten Polytopen im Sinne der Äquivalenz zu der Dimension eines geometrischen Polytops üblich, Rangfunktionen $rang : A \to \mathbb{N} \cup \{\text{-}1\}$ zu definieren und zur Konsistenz weiters den Rang der Halbordnung als den Rang des maximalen Elements festzulegen, welcher nun jedoch um eins kleiner ist als die Länge der

[1] Da die Relation $\preccurlyeq$ als Menge von Paaren von Elementen von $\mathcal{M}$ definiert ist, müsste es eigentlich $(\mathcal{K}, \preccurlyeq \cap \mathcal{K}^2)$ heißen. Hier und in den folgenden Fällen soll auf diese Genauigkeit aber verzichtet werden, es wird stattdessen einfach $(\mathcal{K}, \preccurlyeq)$ geschrieben.

Fahnen. Dadurch gehen jedoch nützliche Eigenschaften der Rangfunktion verloren. Dem Autor scheint es deshalb besser, *rang* als echte Rangfunktion, d. h. nach $\mathbb{N}$ mit $rang(\hat{0}) = 0$, zu definieren und als sinnvolle Ergänzung $rang^*(A) := rang(A) - 1$ einzuführen. So kann *rang* für die Algebra verwendet werden und $rang^*$ für die Polyedrik. Ist im Text vom „Rang“ einer Seite oder eines Polytops die Rede, so ist stets $rang^*$ gemeint, wodurch die Äquivalenz zur Dimension erhalten bleibt.

Für $A \preccurlyeq B$ sei die *Sektion* B/A definiert durch $B/A := \{C \in \mathcal{M} \mid A \preccurlyeq C \preccurlyeq B\}$. Sektionen sind klarerweise beschränkt. Ebenso wie eine eigenständige Halbordnung (als welche sie nämlich aufgefasst werden kann) hat auch eine Sektion einen Rang. Es gilt $rang(B/A) = rang(B) - rang(A)$. Eine Sektion B/A heiße *verbunden*, falls $rang(B/A) \leq 2$ oder für alle $C, D \in B/A \setminus \{A, B\}$ eine endliche Folge $C \mathrel{\diamond\!\!-} X_1 \mathrel{\diamond\!\!-} X_2 \mathrel{\diamond\!\!-} \cdots \mathrel{\diamond\!\!-} X_k \mathrel{\diamond\!\!-} D$ eigentlicher Elemente von B/A existiert. Eine Halbordnung $(M, \preccurlyeq)$ heiße *stark verbunden*, falls für alle $A, B \in M$ mit $A \preccurlyeq B$ die Sektion B/A verbunden ist. Dies ist übrigens für beschränkte, gradierte Halbordnungen äquivalent dazu, dass alle ihre Sektionen *fahnenverbunden* sind, was wiederum bedeutet, dass für alle Fahnen Φ, Ψ einer jeden Sektion $(B/A, \preccurlyeq)$ eine endliche Folge von Fahnen $\Phi = \Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_k = \Psi$ existiert, sodass sich Υ_i und Υ_{i+1} für alle $1 \leq i \leq k-1$ nur um ein Element unterscheiden. (Vgl. McMullen et al. 2002: 24)

Definition 1 (Abstraktes Polytop)**.** *Ein abstraktes Polytop vom Rang n ist eine Halbordnung $P = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ für die die folgenden* Bedingungen *gelten.* (Vgl. Mixer 2009: 1)

1. *P ist beschränkt.* (Def. 1a)
2. *Es existiert eine Rangfunktion rang auf $\mathcal{F}$, sodass $rang^*(\hat{0}) = -1$ und $rang^*(\hat{1}) = n$.* (Def. 1b)
3. *P ist stark verbunden.* (Def. 1c)
4. *Zu allen $F \prec G \prec H$ aus $\mathcal{F}$ existiert genau ein $G' \in \mathcal{F}$ ungleich G, sodass $F \prec G' \prec H$ gilt.* (Def. 1d)

Nach Bedingung (Def. 1b) hat P den Rang n. Im Folgenden ist mit *Polytop* stets ein abstraktes Polytop gemeint, ansonsten wird der Begriff *geometrisches Polytop* gebraucht. Die Relation $\preccurlyeq$ trägt den Namen „ist Unterseite von“.[2]

Definition 2 (Kombinatorische Äquivalenz)**.** *Seien $P = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ und $Q = (\mathcal{G}, \trianglelefteq)$ zwei Polytope. P heißt* kombinatorisch äquivalent *zu Q genau dann, wenn $(\mathcal{F}, \preccurlyeq) \cong (\mathcal{G}, \trianglelefteq)$, also eine bijektive Abbildung $\mathfrak{G} : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ existiert, sodass für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt: $A \preccurlyeq B \iff \mathfrak{G}(A) \trianglelefteq \mathfrak{G}(B)$.* (Vgl. Scharlau 2012: 222)

Die kombinatorische Äquivalenz ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation.

2.2 Spezielle Namen

Sei $P = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ ein Polytop vom Rang n. Dann heißen die Elemente von $\mathcal{F}$ *Seiten* von P; $\hat{0}$ und $\hat{1}$ heißen *uneigentliche Seiten*. Die Menge der Seiten des Polytops, die vom Rang k sind, oder kurz der k-Seiten, wird mit $\mathcal{F}_k$ bezeichnet. Die Seiten vom Rang 0 heißen auch *Ecken*, die Seiten vom Rang 1 *Kanten*, jene vom Rang 2 *Polygone*, Seiten vom Rang

[2] In anderen Quellen wird „ist Seite von“ verwendet, da oft nicht nur ungenau zwischen $\hat{1}$ und P selbst nicht unterschieden wird, sondern auch alle anderen A mit $A/\hat{0}$ gleichgesetzt werden, sodass, wird die Sektion $A/\hat{0}$ als Polytop betrachtet, alle B mit $B \preccurlyeq A$ als Seiten von A bezeichnet werden können. Hier hingegen sollen diese in Analogie zum bei Halbordnungen allgemein verwendeten Begriff des *Unter-* und *Oberelements* die *Unterseiten* von A heißen.

3 heißen *Polyeder*, solche vom Rang 4 schließlich *Polychora*. Dieselben Namen wie die k-Seiten tragen auch Polytope vom Rang k (da Seiten ja auch als Unterpolytope betrachtet werden können). Die uneigentliche Seite $\hat{1}$ heißt *Rumpf*, die Seiten vom Rang $n-1$ heißen *Facetten*, jene vom Rang $n-2$ *Grate* und solche vom Rang $n-3$ *Spitzen*.

2.3 Regularität

Sei $P = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ ein Polytop und Σ die Menge seiner Fahnen. Eine Bijektion $\mathfrak{G} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ heiße *Symmetrie* oder *kombinatorischer Automorphismus*, falls sie ordnungserhaltend ist. Ω sei die Menge der Symmetrien von P. Es heiße $\Gamma = (\Omega, \circ)$ die *Automorphismengruppe* von P, wobei $\circ$ der Verknüfpung, d. h. der aufeinanderfolgenden Anwendung zweier Elemente von Ω entspricht. Es sei nun φ eine *Gruppenoperation* von Γ auf Σ, also $\varphi : \Omega \times \Sigma \to \Sigma$ sodass für alle $\mathfrak{G}, \mathfrak{H} \in \Omega$ und alle $\Phi \in \Sigma$ gilt:

$$\varphi(\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H}, \Phi) = \varphi(\mathfrak{G}, \varphi(\mathfrak{H}, \Phi))$$

sowie

$$\varphi(e, \Phi) = \Phi,$$

wobei e das Einheitselement von Γ bezeichnet. (Vgl. 餘文卿 et al. 2010: 144)

Wird definiert $\psi_{\mathfrak{G}} : \Sigma \to \Sigma : \Phi \mapsto \varphi(\mathfrak{G}, \Phi)$, so gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{G}^{-1} \circ \mathfrak{G}, \Phi) &= \varphi(\mathfrak{G}^{-1}, \varphi(\mathfrak{G}, \Phi)) \\ \varphi(e, \Phi) &= \varphi(\mathfrak{G}^{-1}, \varphi(\mathfrak{G}, \Phi)) \\ \Phi &= \psi_{(\mathfrak{G}^{-1})}(\psi_{\mathfrak{G}}(\Phi)) \end{aligned}$$

$\psi_{(\mathfrak{G}^{-1})}$ ist also eine Umkehrfunktion von $\psi_{\mathfrak{G}}$. Durch Substitution von $\mathfrak{G}^{-1}$ für $\mathfrak{G}$ ergibt sich daraus ebenso, dass auch $\psi_{\mathfrak{G}}$ eine Umkehrfunktion von $\psi_{(\mathfrak{G}^{-1})}$ ist. $\psi_{\mathfrak{G}}$ ist somit für alle $\mathfrak{G} \in \Omega$ eine Bijektion, eine Permutation von Σ. Dies könnte auch so ausgedrückt werden: Die Gruppenoperation φ ordnet jeder Symmetrie eine Permutation der Fahnen zu. Es wird nun φ derart gewählt, dass

$$A \in \Phi \iff \mathfrak{G}(A) \in \varphi(\mathfrak{G}, \Phi)$$

für alle $A \in \mathcal{F}$, alle $\Phi \in \Sigma$ und alle $\mathfrak{G} \in \Omega$. Durch diese Forderung müssen die jeweiligen Symmetrien auch den ihnen zugeordneten Permutationen von Σ entsprechen. Wir sagen, Γ operiere *transitiv* auf Σ, falls gilt: Für alle $\Phi, \Psi \in \Sigma$ existiert ein $\mathfrak{G} \in \Omega$, sodass

$$\varphi(\mathfrak{G}, \Phi) = \Psi.$$

Ist dies der Fall, so heiße das Polytop P *regulär* oder *regelmäßig*. Zusammengefasst gilt also die folgende

Definition 3 (Regularität)**.** *Ein abstraktes Polytop, dessen Gruppe ordnungserhaltender Bijektionen auf den Seiten (also Symmetriegruppe) transitiv auf der Menge seiner Fahnen operiert, heißt* regulär. (Vgl. McMullen et al. 2002: 31)

Kapitel 3

Zu untersuchende Eigenschaften

3.1 f-Vektor

Die Anzahl der k-Seiten eines Polytops wird mit f_k bezeichnet. Ist P ein Polytop vom Rang n, so heißt der Vektor $f = (f_{-1}, f_0, \ldots, f_n)$ *f-Vektor* von P. Falls Unklarheit darüber besteht, um welchen Polytopes f-Vektor es sich handelt, so wird auch $f(P) = (f_{-1}(P), f_0(P), \ldots, f_n(P))$ geschrieben.

3.2 Eulersche Charakteristik

Ein topologischer Wert, der zur Klassifizierung von Polytopen (und, in einer allgemeineren Form, nicht nur diesen) herangezogen werden kann, ist die *Eulersche Charakteristik* χ, auch $\chi(P)$. Sie ist definiert durch:

$$\chi := \sum_{i=0}^{n-1} (\text{-}1)^i f_i$$

Für $n = 3$ gilt beispielsweise

$$\chi = f_0 - f_1 + f_2$$

Im Übrigen gilt bekanntlich für geometrische Polyeder der Eulersche Polyedersatz (vgl. Cauchy 1813: 16–18)

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2,$$

der also äquivalent ist zu $\chi = 2$. Er lässt sich auch auf n-dimensionale[1] Polytope zum *Euler-Schläfli-Satz* verallgemeinern: Dieser wurde als Vermutung gefunden von Ludwig Schläfli, einem schweizer Mathematiker (vgl. Schläfli 1901: 117), jedoch bewiesen erst durch den Franzosen Henry Poincaré (vgl. Poincaré 1893: 144f.).[2]

Satz 4 (Euler-Schläfli-Satz)**.** *Für alle geometrischen Polytope gilt*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\text{-}1)^i f_i = 1 - (\text{-}1)^n,$$

was äquivalent ist zu $\chi = 1 - (\text{-}1)^n$. Es sei angemerkt, dass die naheliegende Erweiterung der Grenzen zu $i = \text{-}1$ und $i = n$ den Satz in die weitaus elegantere Form $\sum_{i=\text{-}1}^{n} (\text{-}1)^i f_i = 0$ brächte. Jedoch hat die Charkteristik χ eine weit über die hier betrachteten Gebiete

[1] Bei geometrischen Polytopen spricht man statt vom Rang von der *Dimension*.

[2] Die weiter zurückliegende Datierung von Poincarés Werk erklärt sich dadurch, dass Schläfli seine *Theorie der vielfachen Kontinuität* zwar in den Jahren 1850—1852 verfasste, diese aber erst 1901 gedruckt wurde.

hinausgehende Bedeutung und wird daher auch so verwendet, anstatt eine andere Variable für $\sum_{i=-1}^{n}(\text{-}1)^i f_i$ einzuführen.

Auf abstrakte Polytope übertragen gilt der Satz für all jene, welche geometrische Entsprechungen haben. Die Formel könnte darum dazu dienen, die später behandelten Gleichungen zwischen f-Vektor und Schläfli-Symbol zu vereinfachen, gilt aber eben nicht allgemein. Da der Spezialfall eines Polytops mit geometrischen Entsprechungen im Folgenden im Unterschied zu anderen Spezialfällen nicht gesondert betrachtet wird, soll auch nicht genauer definiert werden, was eine geometrische Entsprechung eines abstrakten Polytops ist. Es mag jedoch hilfreich sein, zu wissen, dass die Gleichungen in Kapitel 4 nicht nur analog für geometrische Polytope gelten (deren abstrakte Polytope ja eine Verallgemeinerung sind), sondern bei diesen auch noch durch $\chi = 1 - (\text{-}1)^n$ vereinfacht werden können.

3.3 Schläfli-Symbol

Das *Schläfli-Symbol*, benannt nach dem bereits erwähnten Ludwig Schläfli, wird geschrieben als

$$\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}\}$$

und beschreibt den Aufbau eines regulären Polytops. Hierbei entspricht p_k für ein beliebig gewähltes Paar aus einer $(k-1)$-Seite F_{k-1} und einer $(k+2)$-Seite F_{k+2} mit $F_{k-1} \preccurlyeq F_{k+2}$ stets der Anzahl an k-Seiten F_k, sodass gilt $F_{k-1} \preccurlyeq F_k \preccurlyeq F_{k+2}$. Aus (Def. 1d) folgt, dass es ebensoviele $(k+1)$-Seiten F_{k+1} gibt, sodass gilt $F_{k-1} \preccurlyeq F_{k+1} \preccurlyeq F_{k+2}$. Das Schläfli-Symbol ist deshalb nur für reguläre Polytope definiert, weil der Wert von p_k bei nicht regulären Polytopen im Allgemeinen natürlich abhängig von der Wahl der Seiten F_{k-1} und F_{k+2} wäre.

3.4 Fahnenzahl

Eine weitere hilfreiche Charakteristik ist die Anzahl der Fahnen eines Polytops P, die *Fahnenzahl* σ oder $\sigma(P)$. Aus der starken Fahnenverbundenheit des Polytops (deren Äquivalenz zur in der Definition des Polytops verwendeten starken Verbundenheit nicht bewiesen wurde, aber leicht zu zeigen ist), folgt übrigens, dass das Abbild einer beliebigen Fahne durch eine der Symmetrien diese Symmetrie eindeutig bestimmt. Daraus wiederum folgt bei regulären Polytopen durch die Transitivität von φ, dass die Fahnenzahl auch die Anzahl der Symmetrien angibt. (Vgl. Araujo-Pardo et al. 2010: 1876; Pisanski et al. 2012: 3)

$$\sigma := \#\Sigma = \#\Omega$$

Kapitel 4

Allgemeine kombinatorische Untersuchung

Es sollen nun, wo dies möglich ist, einige grundlegende Zusammenhänge zwischen den in Kapitel 3 eingeführten Eigenschaften gefunden werden. Hierbei ist es äußerst hilfreich, Ketten zu zählen.

Sind A und B zwei Seiten eines Polytops mit $rang^*(A) + 2 = rang^*(B)$, so gibt (Def. 1d) an, dass es genau zwei Ketten von A nach B gibt, sollte mindestens eine solche existieren, was äquivalent ist zu $A \preccurlyeq B$. Gilt jedoch $rang^*(A)+3 = rang^*(B)$ und $A \preccurlyeq B$, so lässt sich die Anzahl der Ketten von A nach B stattdessen aus dem Schläfli-Symbol ermitteln: Sei $rang^*(A) = k - 1$. Es existieren genau p_k (wobei p_k die $(k + 1)$-te Zahl im Schläfli-Symbol bezeichnet) k-Seiten C, sodass $A \preccurlyeq C \preccurlyeq B$. Es gilt natürlich für alle solchen C, dass $A \prec C$, da $rang^*(A) + 1 = rang^*(C)$. Somit existiert jeweils genau eine Kette von A nach C. Jede Kette von A nach B entspricht aber der Verknüpfung, das heißt der Vereinigungsmenge, einer Kette von A nach einem C mit einer solchen vom selben C nach B. Da es von jedem C aber wie oben festgestellt genau zwei Ketten nach B gibt, entspricht die Anzahl der Ketten von A nach B dem Doppelten der Anzahl der Seiten C mit $A \preccurlyeq C \preccurlyeq B$, also $2p_k$. Zuletzt gilt, dass die Anzahl der Ketten von $\hat{0}$ nach $\hat{1}$ definitionsgemäß nichts anderes ist als σ.

Für ein Polytop vom Rang 1 gilt natürlich $rang^*(\hat{0}) + 2 = rang^*(\hat{1})$. Demnach gibt es genau zwei Ketten von $\hat{0}$ nach $\hat{1}$; $\sigma = 2$. Das ist nicht sehr überraschend, doch auf gleiche Weise lassen sich auch über Polytope von etwas höherem Rang noch Erkenntnisse gewinnen.

Für ein Polytop vom Rang 2 etwa ist $rang^*(\hat{0}) + 3 = rang^*(\hat{1})$. Das Schläfli-Symbol reduziert sich zu $\{p_0\}$, und es gilt $\sigma = 2p_0$, denn p_0 gibt die Anzahl der 0-Seiten C an, sodass gilt $\hat{0} \preccurlyeq C \preccurlyeq \hat{1}$. Jedoch gilt das in diesem Fall aufgrund der Minimalität von $\hat{0}$ und der Maximalität von $\hat{1}$ für jede 0-Seite C, und somit gibt p_0 tatsächlich die Anzahl aller 0-Seiten an: $p_0 = f_0$. Zuletzt gilt auch $p_0 = f_1$, was einerseits aus Bedingung (Def. 1d) gefolgert werden kann oder aus der vorigen (ebenfalls durch diese Bedingung gewonnen) Feststellung, dass p_0 ebenso die Anzahl der 1-Seiten C mit $\hat{0} \preccurlyeq C \preccurlyeq \hat{1}$ angibt. Es gilt also zusammengefasst für Polytope vom Rang 2:

$$p_0 = f_0 = f_1 = \frac{\sigma}{2}$$

In Kenntnis einer beliebigen dieser drei Eigenschaften, Schläfli-Symbol, f-Vektor oder Fahnenzahl, lassen sich also die beiden anderen leicht ermitteln; in der Tat ist das Polytop vom Rang 2 durch jede einzelne vollständig bestimmt.

Nun zum Rang 3: Hier existieren jeweils genau zwei Ketten von $\hat{0}$ nach einer 1-Seite C, sowie genau zwei Ketten von C nach $\hat{1}$. Genau für jede 1-Seite existieren also vier Fahnen.

Demnach gilt:

$$\sigma = 4f_1$$

Weiters gibt es jeweils genau eine Kette von $\hat{0}$ nach einer 0-Seite C sowie genau $2p_1$ Ketten von C nach $\hat{1}$. Genau zu jeder 0-Seite existieren also $2p_1$ Fahnen, es gilt:

$$\sigma = 2p_1 \cdot f_0$$

Zu jeder 2-Seite C schließlich gibt es genau $2p_0$ Ketten von $\hat{0}$ nach C und genau eine Kette von C nach $\hat{1}$:

$$\sigma = 2p_0 \cdot f_2$$

Es gilt also die Gleichungskette

$$p_1 \cdot f_0 = 2f_1 = p_0 \cdot f_2.$$

Ist der f-Vektor eines Polytops vom Rang 3 bekannt, so lässt sich nun mithilfe der Formeln

$$p_0 = \frac{2f_1}{f_2} \qquad \text{und} \qquad p_1 = \frac{2f_1}{f_0}$$

sein Schläfli-Symbol bestimmen, es lautet ausgeschrieben

$$\left\{ \frac{2f_1}{f_2}, \frac{2f_1}{f_0} \right\}.$$

Umgekehrt ist dies nicht möglich, jedoch schon, falls zusätzlich z. B. die Eulersche Charakteristik bekannt ist:

$$f_0 - f_1 + f_2 = \chi$$

Durch Umformungen ergeben sich die folgenden Formeln:

$$f_0 = 2p_0 \cdot \frac{\chi}{2p_0 - p_0p_1 + 2p_1} \qquad f_1 = p_0p_1 \cdot \frac{\chi}{2p_0 - p_0p_1 + 2p_1} \qquad f_2 = 2p_1 \cdot \frac{\chi}{2p_0 - p_0p_1 + 2p_1}$$

Ohne Kenntnis von χ ist dieses Gleichungssystem nach f nicht eindeutig lösbar, es ist also nicht auszuschließen, dass zu einem Schläfli-Symbol mehrere Polytope vom Rang 3 mit unterschiedlichen f-Vektoren existieren (was auch tatsächlich möglich ist, siehe 6.3 und 6.3.3). Es gilt jedoch, dass die um f_{-1} und f_n gekürzten f-Vektoren aller dieser Polytope parallel zueinander sind, da bei einer Änderung von χ die drei Komponenten mit demselben Faktor multipliziert werden:

$$f^* = \chi \cdot \left(\frac{2p_0}{2p_0 - p_0p_1 + 2p_1}, \frac{p_0p_1}{2p_0 - p_0p_1 + 2p_1}, \frac{2p_1}{2p_0 - p_0p_1 + 2p_1} \right)$$

Deshalb gelte die folgende

Definition 5. *Zwei Polytope, deren Schläfli-Symbole einander gleichen, heißen* parallel.

Sobald es um Polytope vom Rang 4 geht, stoßen derartige Überlegungen an ihre Grenzen. Die Gleichungen, welche sich analog finden lassen, lauten:

$$\sigma = 2 \cdot f_1 \cdot 2p_2$$
$$\sigma = 2p_0 \cdot f_2 \cdot 2$$

Diese zwei Gleichungen reichen natürlich nicht aus, um aus f die Komponenten p_0, p_1 und p_2 zu berechnen, zumal σ ebenfalls unbekannt ist.

Kapitel 5

Polytope vom Rang $n \leq 2$

5.1 Das Nullpolytop ($n = $ -1)

Bei einem Polytop $P = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ vom Rang -1 fallen $\hat{0}$ und $\hat{1}$ zusammen; $\mathcal{F}$ hat nur ein Element. Somit kann nur ein solches Polytop[1] existieren; dieses wird *Nullpolytop* genannt.

$$\hat{0} = \hat{1}$$

Abbildung 1: Hasse-Diagramm des Nullpolytops

Die Abbildung 1 zeigt das *Hasse-Diagramm* des Nullpolytops, benannt nach dem deutschen Mathematiker Helmut Hasse. Im Folgenden finden sich zahlreiche weitere, durchaus anschaulichere Beispiele für Hasse-Diagramme. Sie stellen eine Halbordnung $(\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ dar, indem jedes Element von $\mathcal{F}$ in der Ebene eingezeichnet wird und je zwei Elemente A, B mit $A \prec B$ durch einen Strich verbunden werden,[2] wobei B über A liegt (vgl. Birkhoff 1967: 3).

5.2 Die Ecke ($n = 0$)

Ein Polytop vom Rang 0 kann keine eigentlichen Seiten haben, denn für eine solche Seite A gilt

$$\hat{0} \prec A \prec \hat{1} \Rightarrow rang^*(\hat{0}) < rang^*(A) < rang^*(\hat{1}) \Rightarrow \text{-1} < rang^*(A) < 0.$$

Es besteht also lediglich aus $\hat{0}$ und einer uneigentlichen Ecke als Rumpf.

$$\begin{array}{c} \hat{1} \\ | \\ \hat{0} \end{array}$$

Abbildung 2: Hasse-Diagramm der Ecke

5.3 Die Kante ($n = 1$)

Ein Polytop vom Rang 1 muss mindestens eine Seite A vom Rang 0 haben, um Bedingung (Def. 1b) zu erfüllen. Es gilt $\hat{0} \prec A \prec \hat{1}$. Daraus folgt laut Bedingung (Def. 1d), dass genau

[1] Gemeint ist bei derartigen Aussagen natürlich stets: „nur eine kombinatorische Äquivalenzklasse von Polytopen“

[2] Der in Abbildung 1 zu sehende Doppelstrich ist nicht etwa eine solche Verbindung, sondern ein gewöhnliches Gleichheitszeichen. Statt $\hat{0} = \hat{1}$ hätte auch nur $\hat{0}$ oder nur $\hat{1}$ geschrieben werden können.

eine zweite Seite vom Rang 0 existiert. Das Hasse-Diagramm der Kante sieht somit aus wie in Abbildung 3 gezeigt.

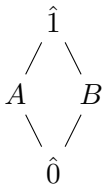

Abbildung 3: Hasse-Diagramm der Kante

5.4 Polygone ($n = 2$)

Bei Polytopen vom Rang 2 reduziert sich das Schläfli-Symbol auf $\{p_0\}$. Diese eine Zahl, p_0, definiert das Polytop vollständig: Wie schon in Kapitel 4 gezeigt, gilt $f = (1, p_0, p_0, 1)$. Alle der verschiedenen Weisen, auf die die einzelnen Ecken im Rahmen der Definition den Kanten als Unterseiten zugeordnet sein können, sind zueinander kombinatorisch äquivalent, allerdings muss gelten $p_0 \geq 2$, damit dies auf überhaupt eine Weise möglich ist. Das heißt, dass für $k = 2, 3, 4, \ldots$ jeweils genau ein Polygon mit exakt k Ecken existiert. Diese Polygone werden, der Reihe nach, als *Digon*, *Dreieck*, *Quadrat*[3], *Fünfeck* usw., sowie allgemein *k-eck* oder *k-gon* bezeichnet.

[3]Die Benennung ist in diesem Punkt inkonsistent gewählt, meint doch die Bezeichnung „Quadrat“ bei geometrischen Polytopen ein regelmäßiges[4] Viereck, wohingegen die Begriffe „Dreieck“, etc. allgemein sind. Jedoch ist es üblich, die in 6.3 behandelte Polytopfamilie als „Hyperkubus“ oder „Hyperwürfel“ und nicht als „Hyperkuboid“ zu bezeichnen, was auch nicht regelmäßige geometrische Entsprechungen einschließen würde. Deshalb soll ihr Mitglied vom Rang zwei den entsprechenden Namen tragen.

[4]nicht zu verwechseln mit „regulär“

Kapitel 6

Familien

Manche reguläre Polytope werden aufgrund spezieller Eigenschaften sogenannten *Polytopfamilien* zugeordnet. Diese besitzen jeweils genau ein Polytop von jedem Rang. Einige Polytope gehören gar zu mehreren Polytopfamilien, gibt es doch auch nicht mehr als eines vom Rang -1, 0 oder 1. Drei der Familien sind von besonderem Interesse, da unter den relevanteren nur sie Entsprechungen im Euklidschen Raum (also Entsprechungen als geometrische Polytope) haben (vgl. 秋山仁 et al. 2011: 271); sie heißen *Simplex*, *Hyperkubus* und *Kreuzpolytop*. Erwähnenswert sind des weiteren das *Ditop* und der *Hemihyperkubus*. Nach ihrem Rang werden einer Polytopfamilie zugehörige Polytope auch als n-Simplizes etc. bezeichnet.

6.1 Simplex

6.1.1 Konstruktion

Der Simplex (von lat. „simplex“ = „einfach“) ist das einfachste Polytop unter jenen, die eine geometrische Entsprechung besitzen. Geometrische n-Simplizes können nämlich elegant als diejenigen n-dimensionalen geometrischen Polytope mit der geringsten Anzahl an Ecken definiert werden (vgl. Kager 1992: 41). Diese Definition lässt sich nicht auf abstrakte Polytope übertragen, denn beispielsweise hat das Dreieck $\mathbb{S}_2$, der abstrakte Simplex vom Rang 2, drei Ecken: mehr als das Zweieck, welches keine Repräsentation im Euklidischen Raum und nur zwei Ecken hat (vgl. Mixer 2009: 3).

Definition 6 (Simplex)**.** $\mathbb{S}$ *ist eine Menge von Polytopen, deren Elemente als* Simplizes *bezeichnet werden. Das Nullpolytop,* $(\{\hat{0}\}, \{(\hat{0}, \hat{0})\})$*, ist der einzige Simplex vom Rang* -1*. Für alle* $n \in \mathbb{N} \cup \{\text{-1}\}$ *gilt: Eine zweistellige Relation* $T = (\mathcal{M}, \trianglelefteq)$ *ist genau dann ein* $(n+1)$*-Simplex, wenn ein* n*-Simplex* $\mathbb{S}_n = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$*, eine Partition* $\{\mathcal{M}_{\aleph}, \mathcal{M}_{\beth}\}$ *von* $\mathcal{M}$ *und eine Funktion* $\mathfrak{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{F}$ *existieren, sodass gilt*

1. $\mathfrak{F}$ *ist bijektiv sowohl auf* $\mathcal{M}_{\aleph}$ *als auch auf* $\mathcal{M}_{\beth}$*.* (Def. 6a)
2. *Für alle* $A, B \in \mathcal{M}_{\aleph}$ *gilt* $A \trianglelefteq B \iff \mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B)$*.* (Def. 6b)
3. *Für alle* $A, B \in \mathcal{M}_{\beth}$ *gilt* $A \trianglelefteq B \iff \mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B)$*.* (Def. 6c)
4. *Für alle* $A \in \mathcal{M}_{\aleph}$ *und* $B \in \mathcal{M}_{\beth}$ *gilt* $A \trianglelefteq B \iff \mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B)$*.* (Def. 6d)
5. *Für alle* $A \in \mathcal{M}_{\beth}$ *und* $B \in \mathcal{M}_{\aleph}$ *gilt* $\neg(A \trianglelefteq B)$*.* (Def. 6e)

Diese Definition funktioniert rekursiv: Der Simplex $\mathbb{S}_{\text{-}1}$ vom Rang -1 ist explizit angegeben und jeder weitere wird durch den vorhergegangenen definiert, wobei aber erst noch zu zeigen ist, dass tatsächlich von jedem Rang n genau ein Simplex existiert (und dieser

demnach mit $\mathbb{S}_n$ bezeichnet werden kann). Bildlich gesprochen wird jedenfalls $\mathbb{S}_{n+1}$ aus $\mathbb{S}_n$ konstruiert, indem eine neue Ecke (nämlich jenes Element von $\mathcal{M}_{\sqsupset}$, dass durch $\mathfrak{F}$ auf $\hat{0}$ abgebildet wird, später mit $\mathfrak{F}_{\sqsupset}^{-1}(\hat{0})$ bezeichnet) hinzugefügt wird, zu der dann von jeder alten Ecke eine neue Kante, von jeder alten Kante eine neue Fläche, von jeder alten Fläche ein neuer Raum, etc. gespannt wird.

Dass der Simplex durch die gegebene Definition in allen Rängen wohldefiniert ist, soll nun in einer Serie von induktiven Beweisen gezeigt werden. Dafür wird angenommen, $\mathbb{S}_n$ sei wohldefiniert, um auf $\mathbb{S}_{n+1}$ zu schließen, indem gezeigt wird, dass (für ein gegebenes $\mathcal{M}$ von geeigneter Mächtigkeit, also $2 \cdot \#\mathcal{F}$) genau eine Relation T existiert, die den Bedingungen der Definition entspricht, und dass diese ein Polytop vom Rang $n+1$ ist.

Die Umkehrfunktionen zu den bijektiven Teilfunktionen von $\mathfrak{F}$ seien $\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1} : \mathcal{F} \to \mathcal{M}_{\aleph}$ und $\mathfrak{F}_{\sqsupset}^{-1} : \mathcal{F} \to \mathcal{M}_{\sqsupset}$. Weiters bedeute $A \lhd B$, dass $A \preccurlyeq B$ und $A \neq B$, $A \lhd\!\cdot\, B$, dass A von B bedeckt wird, und $A \diamond B$, dass $A \preccurlyeq B \vee B \preccurlyeq A$, in Analogie zu den Relationen $\prec$, $\preccurlyeq$ und $\precdot$.

Lemma 7. *$T = (\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ ist eine Halbordnung.*

Beweis. Die Behauptung ist per definitionem äquivalent dazu, dass $\mathcal{M}$ nichtleer (was gegeben ist) und $\preccurlyeq$ reflexiv, antisymmetrisch sowie transitiv ist. Reflexivität, d. h. $A \preccurlyeq A$ für alle A folgt für $A \in \mathcal{M}_{\aleph}$ unmittelbar aus (Def. 6b), für $A \in \mathcal{M}_{\sqsupset}$ aus (Def. 6c). Antisymmetrie, also $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \Rightarrow A = B$ für alle A, B folgt für $A, B \in \mathcal{M}_{\aleph}$ aus Bedingung (Def. 6b), für $A, B \in \mathcal{M}_{\sqsupset}$ aus (Def. 6c), für $A \in \mathcal{M}_{\aleph}$ und $B \in \mathcal{M}_{\sqsupset}$ oder umgekehrt aus der Bedingung (Def. 6e), wobei in diesem Fall natürlich $A = B$ unmöglich ist. Transitivität bedeutet $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq C \Rightarrow A \preccurlyeq C$ für alle A, B, C. Aufgrund von (Def. 6e) kann die Bedingung $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq C$ nur eintreten, falls

1. $A, B, C \in \mathcal{M}_{\aleph}$,
2. $A, B \in \mathcal{M}_{\aleph}$ und $C \in \mathcal{M}_{\sqsupset}$,
3. $A \in \mathcal{M}_{\aleph}$ und $B, C \in \mathcal{M}_{\sqsupset}$ oder
4. $A, B, C \in \mathcal{M}_{\sqsupset}$.

In allen vier Fällen folgt die Gültigkeit nach (Def. 6b), (Def. 6c) und/oder (Def. 6d) aus der Transitivität von $\preccurlyeq$. Die Operation $\preccurlyeq$ erfüllt demnach alle notwendigen Bedingungen. □

Lemma 8. *Für alle $A, B \in \mathcal{M}_{\aleph}$ und alle $A, B \in \mathcal{M}_{\sqsupset}$ gilt:*

$$A \lhd B \iff \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(B) \tag{1a}$$

Für alle $A \in \mathcal{M}_{\aleph}, B \in \mathcal{M}_{\sqsupset}$ gilt:

$$A \lhd B \iff \mathfrak{F}(A) = \mathfrak{F}(B) \tag{1b}$$

Beweis. Zunächst soll (1a) gezeigt werden. Hier wird angenommen, es gelte $A, B \in \mathcal{M}_{\aleph}$, der Beweis verläuft jedoch analog für $\mathcal{M}_{\sqsupset}$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(B) \\ \Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(B) \\ \Longrightarrow \quad & A \lhd B \qquad \text{nach (Def. 6b)} \end{aligned}$$

Natürlich gilt ebenso

$$A \lhd B \Rightarrow A \lhd B.$$

Gilt also eine beliebige der beiden Aussagen, deren Äquivalenz zu beweisen ist, so gilt auch $A \lhd B$. Es genügt demnach, die Äquivalenz unter der Annahme $A \lhd B$ zu zeigen:

$$\nexists C \in \mathcal{M} : A \lhd C \lhd B \iff \nexists C \in \mathcal{M} : \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(C) \prec \mathfrak{F}(B)$$

Die linke Seite ist aber äquivalent zu (der Unterschied liegt in „$\mathcal{M}_{\aleph}$“ anstelle von „$\mathcal{M}$“)

$$\nexists C \in \mathcal{M}_{\aleph} : A \lhd C \lhd B,$$

die rechte Seite hingegen zu

$$\nexists C \in \mathcal{M}_{\aleph} : \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(C) \prec \mathfrak{F}(B),$$

weshalb es genügt, zu zeigen:

$$\nexists C \in \mathcal{M}_{\aleph} : A \lhd C \lhd B \iff \nexists C \in \mathcal{M}_{\aleph} : \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(C) \prec \mathfrak{F}(B)$$

Das aber ist gezeigt, falls für alle C in $\mathcal{M}_{\aleph}$ gezeigt werden kann, dass

$$A \lhd C \lhd B \iff \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(C) \prec \mathfrak{F}(B).$$

Es gilt aufgrund von (Def. 6a)

$$A \neq C \neq B \iff \mathfrak{F}(A) \neq \mathfrak{F}(C) \neq \mathfrak{F}(B)$$

sowie nach (Def. 6b)

$$A \trianglelefteq C \trianglelefteq B \iff \mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(C) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B),$$

was zu dieser Behauptung äquivalent ist.

Um (1b) zu zeigen, soll zunächst die Richtung „$\Rightarrow$“ betrachtet werden:

	A	$\vartriangleleft$ B	
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{F}(A)$	$\preccurlyeq$ $\mathfrak{F}(B)$	nach (Def. 6d)
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{F}(A)$	$\preccurlyeq$ $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(B))) = \mathfrak{F}(B)$	
$\Longrightarrow$	A	$\trianglelefteq$ $\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(B)) \lhd B$	nach (Def. 6b) und (Def. 6d)
$\Longrightarrow$	A	$=$ $\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(B))$	aufgrund von $A \vartriangleleft B$
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{F}(A)$	$=$ $\mathfrak{F}(B)$	

Die Richtung „$\Leftarrow$“ lässt sich schließlich durch einen Widerspruchsbeweis zeigen: Es wird ausgegangen von $\mathfrak{F}(A) = \mathfrak{F}(B)$ und der Annahme (woraus folgt $A \trianglelefteq B$), es existiere ein $C \in \mathcal{M}$, sodass $A \lhd C \lhd B$. Ist nun $C \in \mathcal{M}_{\aleph}$, so gilt

$$\mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(C) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B) = \mathfrak{F}(A),$$

ist jedoch $C \in \mathcal{M}_{\beth}$, so gilt

$$\mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(C) \prec \mathfrak{F}(B) = \mathfrak{F}(A).$$

In beiden Fällen folgt aus der Antisymmetrie von $\preccurlyeq$, dass $\mathfrak{F}(A) = \mathfrak{F}(C)$, was jedoch ein Widerspruch zu $\mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(C)$ bzw. $\mathfrak{F}(C) \prec \mathfrak{F}(A)$ ist. Die Annahme ist demnach falsch, und es gilt $A \vartriangleleft B$. Somit ist die Äquivalenz gezeigt. □

Lemma 9. *$T = (\mathcal{M}, \trianglelefteq)$ ist (für ein gegebenes $\mathcal{M}$ von geeigneter Mächtigkeit, also für $\#\mathcal{M} = 2 \cdot \#\mathcal{F}$) eindeutig definiert.*

Beweis. Aus den Bedingungen (Def. 6b) bis (Def. 6d) folgt für jedes $(A, B) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, ob $A \trianglelefteq B$ (d. h. ob $(A, B) \in \trianglelefteq$), oder nicht. Die Operation $\trianglelefteq$ ist also eindeutig festgelegt und T wohldefiniert. □

Lemma 10. *$T = (\mathcal{M}, \trianglelefteq)$ ist ein Polytop vom Rang $n + 1$.*

Beweis. Die erste der vier Bedingungen in der Definition eines Polytops vom Rang $n+1$, (Def. 1a), ist die Beschränktheit. Seien $\hat{0}$ das minimale und $\hat{1}$ das maximale Element von $\mathbb{S}_n$. Dann gilt nach (Def. 6b) und (Def. 6d) für alle $A \in \mathcal{M}$, dass $\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\hat{0}) \trianglelefteq A$ sowie nach (Def. 6c) und (Def. 6d), dass $A \trianglelefteq \mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\hat{1})$. T hat also sowohl ein minimales als auch ein maximales Element.

(Def. 1b) verlangt die Existenz einer Rangfunktion $rang_2$ auf $\mathcal{M}$, sodass

$$rang_2^*(\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\hat{0})) = -1 \qquad \text{und} \qquad rang_2^*(\mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\hat{1})) = n + 1.$$

Diese kann definiert werden als $rang_2 : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ mit $rang_2 : A \mapsto rang(\mathfrak{F}(A))$ für $A \in \mathcal{M}_{\aleph}$ und $rang_2 : A \mapsto rang(\mathfrak{F}(A)) + 1$ für $A \in \mathcal{M}_{\beth}$, wobei $rang$ die Rangfunktion auf $\mathcal{F}$ bezeichnet. Es ist gezeigt, dass die Funktion $rang_2$ eine Rangfunktion ist, falls für alle $A, B \in \mathcal{M}$ gilt

$$A \triangleleft B \Rightarrow rang_2(A) < rang_2(B) \tag{2a}$$

$$A \trianglelefteq B \Rightarrow rang_2(A) + 1 = rang_2(B). \tag{2b}$$

Um die Gültigkeit von (2a) zu zeigen, müssen erneut drei Fälle unterschieden werden.

Gilt $A, B \in \mathcal{M}_{\aleph}$, so folgt aus

$$\begin{aligned} & A \triangleleft B \\ \Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(B) \\ \Longrightarrow \quad & rang(\mathfrak{F}(A)) < rang(\mathfrak{F}(B)) \\ \Longrightarrow \quad & rang_2(A) < rang_2(B) \end{aligned}$$

Gilt $A, B \in \mathcal{M}_{\beth}$, so folgt aus

$$\begin{aligned} & A \triangleleft B \\ \Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(B) \\ \Longrightarrow \quad & rang(\mathfrak{F}(A)) < rang(\mathfrak{F}(B)) \\ \Longrightarrow \quad & rang_2(A) + 1 < rang_2(B) + 1 \\ \Longrightarrow \quad & rang_2(A) < rang_2(B) \end{aligned}$$

Gilt $A \in \mathcal{M}_{\aleph}$ und $B \in \mathcal{M}_{\beth}$, so folgt aus

$$\begin{aligned} & A \triangleleft B \\ \Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B) \\ \Longrightarrow \quad & rang(\mathfrak{F}(A)) \leq rang(\mathfrak{F}(B)) \\ \Longrightarrow \quad & rang_2(A) \leq rang_2(B) + 1 \\ \Longrightarrow \quad & rang_2(A) < rang_2(B) \end{aligned}$$

$A \in \mathcal{M}_{\beth}$ und $B \in \mathcal{M}_{\aleph}$ ist ausgeschlossen, also gilt die Folgerung in jedem Fall.

Um (2b) zu beweisen, sei zunächst angenommen, dass $A, B \in \mathcal{M}_{\aleph}$ oder $A, B \in \mathcal{M}_{\beth}$. Es folgt aus

$$\begin{aligned} & A \trianglelefteq B \\ \Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B) \\ \Longrightarrow \quad & rang(\mathfrak{F}(A)) = rang(\mathfrak{F}(B)) + 1 \\ \Longrightarrow \quad & rang_2(A) = rang_2(B) + 1 \end{aligned}$$

Im anderen Fall, also wenn $A \in \mathcal{M}_{\aleph}$ und $B \in \mathcal{M}_{\beth}$, folgt aus

$$\begin{aligned} & A \lhd B \\ \Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) = \mathfrak{F}(B) \\ \Longrightarrow \quad & rang(\mathfrak{F}(A)) = rang(\mathfrak{F}(B)) \\ \Longrightarrow \quad & rang_2(A) = rang_2(B) + 1 \end{aligned}$$

Da $rang_2$ alle Bedingungen der Definition erfüllt, ist die Funktion tatsächlich eine Rangfunktion auf $\mathcal{M}$. Des weiteren gilt wie gefordert

$$rang_2^*(\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\hat{0})) = rang_2(\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\hat{0})) - 1 = rang(\hat{0}) - 1 = \text{-1}$$

sowie

$$rang_2^*(\mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\hat{1})) = rang_2(\mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\hat{1})) - 1 = rang(\hat{1}) = n + 1.$$

(Def. 1b) ist somit ebenfalls erfüllt.

(Def. 1c) verlangt, dass T stark verbunden ist. Sei B/A also eine Sektion von T. Es ist zu zeigen, dass B/A verbunden ist. Im Fall dass $rang_2(B/A) \leq 2$ ist nichts zu zeigen, da B/A per definitionem verbunden ist. Gilt jedoch $rang_2(B/A) > 2$, so ist zu zeigen, dass zu allen $C, D \in B/A \setminus \{A, B\}$ eine Folge $C \diamond X_1 \diamond \cdots \diamond X_k \diamond D$ mit $X_i \in B/A \setminus \{A, B\}$ für alle $i = 1, \ldots, k$ existiert. Da aus $A \trianglelefteq B$ folgt $\mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B)$, ist $\mathfrak{F}(B)/\mathfrak{F}(A)$ eine Sektion (allerdings natürlich nicht von T, sondern von S_n). Der Rang dieser Sektion ist entweder gleich dem Rang von B/A, oder um eins kleiner, nämlich genau dann, wenn $A \in \mathcal{M}_{\aleph}$ und $B \in \mathcal{M}_{\beth}$; es gilt daher sicher $rang(\mathfrak{F}(B)/\mathfrak{F}(A)) \geq 2$. Ist es nun der Fall, dass $rang(\mathfrak{F}(B)/\mathfrak{F}(A)) = 2$, so hat $\mathfrak{F}(B)/\mathfrak{F}(A)$ gemäß (Def. 1d) nur zwei eigentliche Elemente; sie sollen als W und V bezeichnet werden. Die Elemente von B/A sind genau alle Bilder der Elemente von $\mathfrak{F}(B)/\mathfrak{F}(A)$ der Funktionen $\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}$ und $\mathfrak{F}_{\beth}^{-1}$, das sind

$$\{A, \mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(W), \mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(V), \mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(B)), \mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\mathfrak{F}(A)), \mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(W), \mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(V), B\}.$$

Da gilt

$$\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(W) \diamond \mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(B)) \diamond \mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(V) \diamond \mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(V) \diamond \mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\mathfrak{F}(A)) \diamond \mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(W),$$

ist die Sektion B/A im Fall $rang(\mathfrak{F}(B)/\mathfrak{F}(A)) = 2$ verbunden. Gilt jedoch $rang(\mathfrak{F}(B)/\mathfrak{F}(A)) > 2$, so muss in $\mathfrak{F}(B)/\mathfrak{F}(A)$ defininitionsgemäß für jedes Paar eigentlicher Elemente dieser Sektion eine endliche Folge von zueinander der Reihe nach inzidenten solchen existieren, die diese „verbindet“. O. B. d. A. sei nun $rang(C) \leq rang(D)$. Zwar gilt möglicherweise $\mathfrak{F}(C) = \mathfrak{F}(A)$ oder $\mathfrak{F}(D) = \mathfrak{F}(B)$, aber es können E und F aus $\mathcal{F}$ derart gewählt werden, dass $E = \mathfrak{F}(C)$, falls $\mathfrak{F}(C) \neq \mathfrak{F}(A)$, aber $\mathfrak{F}(C) \prec E$ anderenfalls; ebenso $F = \mathfrak{F}(D)$, falls $\mathfrak{F}(D) \neq \mathfrak{F}(B)$, sonst $F \prec \mathfrak{F}(D)$. In jedem Fall gilt dann $E, F \in \mathfrak{F}(B)/\mathfrak{F}(A) \setminus \{\mathfrak{F}(A), \mathfrak{F}(B)\}$. Darum muss nun eine endliche Folge $E \mathrel{\diamond\!\!\!\!-} X_1 \mathrel{\diamond\!\!\!\!-} \cdots \mathrel{\diamond\!\!\!\!-} X_k \mathrel{\diamond\!\!\!\!-} F$ von Elementen von $\mathfrak{F}(B)/\mathfrak{F}(A) \setminus \{\mathfrak{F}(A), \mathfrak{F}(B)\}$ existieren. Da aber alle Abbilder der Elemente von $\mathfrak{F}(B)/\mathfrak{F}(A) \setminus \{\mathfrak{F}(A), \mathfrak{F}(B)\}$ durch die Funktionen $\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}$ und $\mathfrak{F}_{\beth}^{-1}$ in $B/A \setminus \{A, B\}$ enthalten sind, ist

$$C \diamond \mathfrak{F}_C^{-1}(E) \diamond \mathfrak{F}_C^{-1}(X_1) \diamond \cdots \diamond \mathfrak{F}_C^{-1}(X_k) \diamond \mathfrak{F}_C^{-1}(F) \diamond \mathfrak{F}_D^{-1}(F) \diamond D$$

eine gültige Verbindung von C und D. Hierbei stehen $\mathfrak{F}_C^{-1}$ und $\mathfrak{F}_D^{-1}$ jeweils entweder für $\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}$ oder $\mathfrak{F}_{\beth}^{-1}$, je nach Zugehörigkeit von C bzw. D zu $\mathcal{M}_{\aleph}$ oder $\mathcal{M}_{\beth}$.

Zuletzt fordert (Def. 1d), auch als *diamond property* bezeichnet: Zu allen $A \lhd B \lhd C$ existiert genau ein $B' \neq B$, sodass $A \lhd B' \lhd C$ gilt. Wieder müssen einige Fälle unterschieden werden. Im ersten Fall gilt $A, B, C \in \mathcal{M}_{\aleph}$. Hier ist $A \lhd B \lhd C$ nach Lemma 8 äquivalent zu $\mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(B) \prec \mathfrak{F}(C)$. Da es in $\mathcal{F}$ nach (Def. 1d) genau ein

$D \neq \mathfrak{F}(B)$ mit $\mathfrak{F}(A) \prec D \prec \mathfrak{F}(C)$ geben muss, ist $\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(D)$ aufgrund der Bijektivität von $\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}$ das eine und einzige B' mit $A \lhd B' \lhd C$. Die Überlegung gilt analog für $A, B, C \in \mathcal{M}_{\beth}$. Gilt jedoch $A, B \in \mathcal{M}_{\aleph}$ und $C \in \mathcal{M}_{\beth}$, so folgt, ebenfalls nach Lemma 8, $\mathfrak{F}(B) = \mathfrak{F}(C)$. Es existiert hier mindestens ein B' mit der betrachteten Eigenschaft, nämlich $\mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\mathfrak{F}(A))$, da gilt

$$\mathfrak{F}(A) = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\mathfrak{F}(A))) \Rightarrow A \lhd \mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\mathfrak{F}(A))$$

sowie

$$\begin{aligned}
& A \lhd B \\
\Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(B) \\
\Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(C) \\
\Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(\mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\mathfrak{F}(A))) \prec \mathfrak{F}(C) \\
\Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\mathfrak{F}(A)) \lhd C
\end{aligned}$$

Es bleibt zu beweisen, dass nicht mehr als ein solches B' existieren kann. Für einen Widerspruchsbeweis sei angenommen, es existiere ein $B'' \in \mathcal{M}$ ungleich B und B', das $A \lhd B'' \lhd C$ erfülle. Gilt $B'' \in \mathcal{M}_{\aleph}$, so folgt aus

$$\begin{aligned}
& B'' \lhd C \\
\Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(B'') = \mathfrak{F}(C) && \text{nach (Def. 6d)} \\
\Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(B'')) = \mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(C)) \\
\Longrightarrow \quad & B'' = B && \lightning
\end{aligned}$$

Gilt jedoch $B'' \in \mathcal{M}_{\beth}$, so folgt aus

$$\begin{aligned}
& A \lhd B'' \\
\Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) = \mathfrak{F}(B'') && \text{nach (Def. 6d)} \\
\Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\mathfrak{F}(A)) = \mathfrak{F}_{\beth}^{-1}(\mathfrak{F}(B'')) \\
\Longrightarrow \quad & B' = B'' && \lightning
\end{aligned}$$

Beide Fälle führen auf einen Widerspruch; die Eindeutigkeit von B' ist somit bewiesen. Der einzig verbleibende Fall tritt ein, wenn $A \in \mathcal{M}_{\aleph}$ und $B, C \in \mathcal{M}_{\beth}$. Die Gültigkeit von $A \lhd B' \lhd C$ für $B' = \mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(C))$ zeigt sich analog zum vorigen Fall durch

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(C))) = \mathfrak{F}(C) \Rightarrow \mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(C)) \lhd C$$

sowie

$$\begin{aligned}
& A \lhd B \\
\Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(B) \\
\Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(C) \\
\Longrightarrow \quad & \mathfrak{F}(A) \prec \mathfrak{F}(\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(C))) \\
\Longrightarrow \quad & A \lhd \mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}(\mathfrak{F}(C))
\end{aligned}$$

Der Ausschluss der Existenz eines B'' erfolgt exakt wie im vorigen Fall, lediglich die Benennung von B und B' ist vertauscht. Die Gültigkeit von (Def. 1d) ist für alle möglichen Fälle bewiesen.

Dadurch ist schließlich gezeigt, dass T ein Polytop vom Rang $n+1$ ist. □

Es existiert also gemäß Definition genau ein Simplex vom Rang -1 und wie gezeigt zu jedem Simplex S_n vom Rang n genau ein Simplex vom Rang $n+1$. Es gibt demnach genau einen Simplex jeden Ranges. T kann deshalb mit $\mathbb{S}_{n+1}$ bezeichnet werden.

6.1.2 Kombinatorische Untersuchung

Satz 11. *Es gilt* $f_k(\mathbb{S}_n) = \binom{n+1}{k+1}$ *für alle* $n, k \in \mathbb{N} \cup \{\text{-}1\}$ *mit* $k \leq n$.

Beweis. Für den Induktionsbeweis werden sowohl Seiten von $\mathbb{S}_n$ als auch solche von $\mathbb{S}_{n+1}$ betrachtet, daher sei $\mathbb{S}_n = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ und $\mathbb{S}_{n+1} = (\mathcal{G}, \trianglelefteq)$. Des Weiteren sei $\{\mathcal{G}_{\aleph}, \mathcal{G}_{\sqsupset}\}$ die in der rekursiven Definition von $\mathbb{S}_{n+1}$ verwendete Partition der Menge $\mathcal{G}$, welche dort mit $\mathcal{M}$ bezeichnet wird.

$$f_k(\mathbb{S}_{n+1}) = \#\{A \in \mathcal{G} \mid rang_2^*(A) = k\}$$

Da

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\aleph} \cup \mathcal{G}_{\sqsupset} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{G}_{\aleph} \cap \mathcal{G}_{\sqsupset} = \varnothing,$$

gilt

$$\begin{aligned} \#\{A \in \mathcal{G} \mid rang_2^*(A) = k\} &= \#\{A \in \mathcal{G}_{\aleph} \mid rang_2^*(A) = k\} \\ &+ \#\{A \in \mathcal{G}_{\sqsupset} \mid rang_2^*(A) = k\} \end{aligned}$$

Da jedoch gilt

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{G}_{\aleph} \wedge rang_2^*(A) = k &\iff rang^*(\mathfrak{F}(A)) = k \\ A \in \mathcal{G}_{\sqsupset} \wedge rang_2^*(A) = k &\iff rang^*(\mathfrak{F}(A)) = k - 1 \end{aligned}$$

gilt auch

$$\begin{aligned} \#\{A \in \mathcal{G}_{\aleph} \mid rang_2^*(A) = k\} &= \#\{A \in \mathcal{F} \mid rang^*(A) = k\} \\ \#\{A \in \mathcal{G}_{\sqsupset} \mid rang_2^*(A) = k\} &= \#\{A \in \mathcal{F} \mid rang^*(A) = k - 1\} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} f_k(\mathbb{S}_{n+1}) &= \#\{A \in \mathcal{F} \mid rang^*(A) = k\} \\ &+ \#\{A \in \mathcal{F} \mid rang^*(A) = k - 1\} \end{aligned}$$

das heißt, vorausgesetzt, dass $k \geq \text{-}1$,

$$f_k(\mathbb{S}_{n+1}) = f_k(\mathbb{S}_n) + f_{k-1}(\mathbb{S}_n). \tag{3}$$

Um diese Rekursion als allgemein gültig verwenden zu können, setzen wir $f_{\text{-}2}(\mathbb{S}_n) = 0$. Sie entspricht jener der Binomialkoeffizienten; außerdem gilt $f_{\text{-}1}(\mathbb{S}_{\text{-}1}) = \binom{0}{0}$. Damit kann leicht die vollständige Induktion nach n durchgeführt werden. □

Da $f_0(\mathbb{S}_2) = \binom{3}{1} = 3$ hat der 2-Simplex drei Ecken, er entspricht also dem Dreieck. Der 3-Simplex heißt auch *Tetraeder* und hat den f-Vektor $f(\mathbb{S}_3) = (1, 4, 6, 4, 1)$, welcher natürlich der vierten Zeile des Pascalschen Dreiecks entspricht. Als Hasse-Diagramm dargestellt sieht der Simplex $\mathbb{S}_3$ mit den Ecken $\{A, B, C, D\}$ aus, wie in Abbildung 4 ersichtlich.

Lemma 12. *Die Seiten eines Simplicis unterscheiden sich paarweise in der Menge der Ecken, die ihre Unterseiten sind.*

Beweis des Lemmas, zur Abwechslung anschaulich statt formal. Auch dies lässt sich induktiv zeigen. Es gelte die Annahme, der Simplex $\mathbb{S}_{N+1}$, jedoch nicht der Simplex $\mathbb{S}_N$, habe zwei verschiedene Seiten A und B, sodass die Menge der 0-Unterseiten von A (also der Ecken, die Unterseiten von A sind) gleich jener der 0-Unterseiten von B, ist.

Es sei nun weiters angenommen, die bei der Konstruktion von $\mathbb{S}_{N+1}$ hinzugekommene Ecke $\mathfrak{F}_{\sqsupset}^{-1}(\hat{0})$ (wobei $\hat{0}$ das minimale Element von $\mathbb{S}_N$ bezeichnet) sei nicht Unterseite von A und folglich auch nicht von B. Das ist gleichbedeutend damit, dass A und B keine der neuen Seiten sind, sondern zu den alten, von $\mathbb{S}_N$ kopierten Seiten zählen, also Elemente

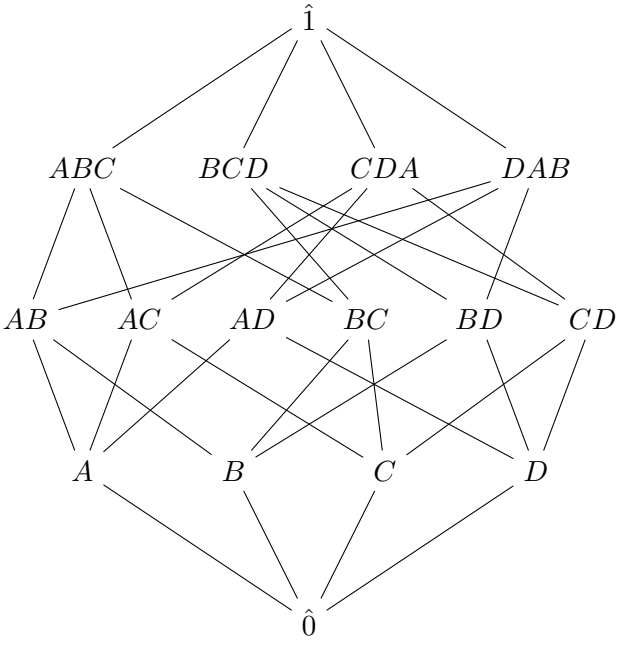

Abbildung 4: Hasse-Diagramm von $\mathbb{S}_3$

von $\mathcal{F}_1$ sind. Demzufolge müssen aber nach (Def. 6b) und (Def. 6e) schon ihre Urbilder gleiche Eckenmengen besitzten. Dies ist ein Widerspruch zur ersten Annahme.

Ist jedoch die neue Ecke $\mathfrak{F}_{\sqsupseteq}^{-1}(\hat{0})$ eine Unterseite von A und B, so ist zunächst festzuhalten, dass A und B keine Ecken sein können, weder beide noch nur eine der beiden Seiten. Die einzige Ecke, die Oberseite von $\mathfrak{F}_{\sqsupseteq}^{-1}(\hat{0})$ ist, ist nämlich $\mathfrak{F}_{\sqsupseteq}^{-1}(\hat{0})$ selbst. Da A und B verschieden sind, könnte deshalb höchstens eine von beiden Seiten eine Ecke sein. Wie diese müsste dann jedoch die andere Seite neben $\mathfrak{F}_{\sqsupseteq}^{-1}(\hat{0})$ keine weiteren Ecken als Unterseiten haben, was schon als Kante nicht möglich ist. Als zwei Nicht-Ecken sind A und B also in der Konstruktion von $\mathbb{S}_{n+1}$ entstanden, indem, ist A z. B. eine Fläche, A von der Kante $\mathfrak{F}(A)$ zu $\mathfrak{F}_{\sqsupseteq}^{-1}(\hat{0})$ „aufgespannt“ wurde. Diese Kante hat aber genau dieselben Ecken als Unterseiten wie A selbst, und durch B auch dieselben wie $\mathfrak{F}(B)$. Im alten Simplex $\mathbb{S}_n$ existierten mit $\mathfrak{F}(A)$ und $\mathfrak{F}(B)$ demnach ebenfalls zwei Seiten, die sich dieselbe Eckenmenge teilten. Wiederum widerspricht das der ersten Annahme, die folglich falsch ist.

Ist also die Aussage, in $\mathbb{S}_n$ existiere ein Paar verschiedener Seiten mit gleichen Eckenmengen, für $n = N + 1$ wahr, so muss sie auch für $n = N$ wahr sein. Da sie jedoch für $n =$ -1 offensichtlich nicht erfüllt ist, ist sie gemäß dem Induktionsprinzip ebenso für alle folgenden n falsch. □

Die Anzahl der Seiten von $\mathbb{S}_n$ beträgt

$$\#\mathcal{F}(\mathbb{S}_n) = \sum_{k=-1}^{n} f_k(\mathbb{S}_n) = \sum_{k=-1}^{n} \binom{n+1}{k+1} = 2^{n+1},$$

ebenso wie die Kardinalität der Potenzmenge seiner Ecken, da

$$\#\mathfrak{P}(F_0(\mathbb{S}_n)) = 2^{f_0(\mathbb{S}_n)} = 2^{n+1}.$$

Somit existiert zu jeder Menge an Ecken von $\mathbb{S}_n$ nicht nur maximal eine, sondern genau eine Seite; es lässt sich eine sehr schöne Bijektion zwischen der Menge der Seiten und der Potenzmenge der Menge der Ecken herstellen. Insbesondere heißt das: Jedes Paar von Ecken wird durch (genau) eine Kante verbunden, jedes Tripel durch (genau) eine Fläche,

jedes Quadrupel durch (genau) einen Raum, etc., die Ecken sind also beliebig untereinander austauschbar. Darum besitzt der Simplex zusätzlich zur Regularität eine weitere Art von Symmetrie, die hier als *Eckensymmetrie*[1] bezeichnet werden soll:

Definition 13 (Eckensymmetrie)**.** *Ein abstraktes Polytop, dessen Symmetriegruppe transitiv auf der Menge der Permutationen seiner Ecken operiert, heißt eckensymmetrisch.*

Die vorhin gefundene Eigenschaft soll hier noch einmal als Satz formuliert werden:

Satz 14. *Sei $\mathcal{H}$ eine Menge von Ecken von $\mathbb{S}_n$. Dann existiert genau eine Seite A, sodass $\mathcal{H}$ die Menge der 0-Unterseiten von A ist.*

Was bis jetzt noch unbewiesen blieb, ist die Regularität. Auch sie lässt sich formal aus der rekursiven Konstruktionsvorschrift der Definition ableiten, hier soll jedoch ein anderer Beweis auf der Grundlage der Eckensymmetrie gegeben werden:

Beweis. Zu zeigen ist, dass für alle $\Phi, \Psi \in \Sigma$ ein $\mathfrak{G} \in \Omega$ existiert, sodass $\varphi(\mathfrak{G}, \Phi) = \Psi$. Es seien also $\Phi, \Psi \in \Sigma$, weiters ϕ_k und ψ_k die k-Seiten von Φ bzw. Ψ. Es werde eine Permutation $\pi : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0$ konstruiert, sodass $\pi(\phi_0) = \psi_0$. Weiters soll jene von ϕ_0 verschiedene Ecke, die Unterseite von ϕ_1 ist, auf jene von ψ_0 verschiedene Ecke, die Unterseite von ψ_1 ist, abgebildet werden, dann jene Ecke, die Unterseite von ϕ_2, aber nicht von ϕ_1 ist, auf jene Ecke, die Unterseite von ψ_2, aber nicht von ψ_1 ist, etc. Die dieser Permutation der Ecken entsprechende Symmetrie (deren Existenz durch die Eckensymmetrie bedingt ist) bildet nun Φ durch φ auf Ψ ab. □

Da der Simplex, wie bereits festgestellt, eckensymmetrisch ist, seine Symmetriegruppe also transitiv auf der Menge der Permutationen seiner Ecken operiert, existiert zu jeder Eckenpermutation mindestens eine Symmetrie. Mehr als eine kann es aber auch nicht sein, da, wie eben festgestellt wurde, jede Seite des Simplicis durch ihre Eckenmenge codierbar ist, eine Vertauschung der Ecken also auch die Vertauschung aller restlichen Seiten eindeutig festlegt. Darum hat der Simplex gleich viele Symmetrien wie Eckenpermutationen, $\#\Omega = \#S_{f_0}$, wobei S_{f_0} die Menge der Permutationen der f_0-elementigen Menge bezeichnet. Es gilt also

$$\sigma(\mathbb{S}_n) = (n+1)!$$

Nun soll noch das Schläfli-Symbol bestimmt werden. Jenes von $\mathbb{S}_n = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ sei $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-2}\}$, das von $\mathbb{S}_{n+1} = (\mathcal{G}_\aleph \cup \mathcal{G}_\beth, \trianglelefteq)$ gleich $\{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$. Für ein natürliches $k \leq n-2$ seien A eine $(k-1)$-Seite und B eine $(k+2)$-Seite von $\mathbb{S}_{n+1}$, sodass $A \trianglelefteq B$ und $A, B \in \mathcal{G}_\aleph$. p_k ist nun gleich der Anzahl an k-Seiten C von $\mathbb{S}_{n+1}$, sodass $A \trianglelefteq C \trianglelefteq B$. Alle solche Seiten müssen Elemente von $\mathcal{G}_\aleph$ sein und unter dieser Voraussetzung ist die Bedingung äquivalent zu $\mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(C) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B)$. Aus der Bijektivität von $\mathfrak{F}_\aleph^{-1}$ folgt deshalb, dass es ebensoviele $D \in \mathcal{F}$ mit $\mathfrak{F}(A) \preccurlyeq D \preccurlyeq \mathfrak{F}(B)$ gibt wie gesuchte C. Da aber $\mathfrak{F}(A)$ und $\mathfrak{F}(B)$ ebenso eine $(k-1)$- und eine $(k+2)$-Seite von $\mathbb{S}_n$ sind, gilt für $0 \leq k \leq n-2$:

$$q_k = p_k$$

Für ein Paar von $A, B \in \mathcal{G}_\beth$, nicht $\mathcal{G}_\aleph$, mit wieder $A \trianglelefteq B$ vom Rang $k-1$ und $k+2$, wobei $1 \leq k \leq n-1$, lässt sich ebenfalls genau für jedes $C \in \mathcal{G}$ vom Rang k mit $A \trianglelefteq C \trianglelefteq B$ genau ein $D \in \mathcal{F}$ mit $\mathfrak{F}(A) \trianglelefteq D \trianglelefteq \mathfrak{F}(B)$ finden, jedoch hier nicht ebenfalls vom Rang k, sondern vom Rang $k-1$. Ebenso ist nun $\mathfrak{F}(A)$ nicht wie A selbst vom Rang $k-1$, sondern vom Rang $k-2$ und $\mathfrak{F}(B)$ vom Rang $k+1$. Daher folgt hieraus für alle $1 \leq k \leq n-1$:

$$q_k = p_{k-1}$$

[1] nicht zu verwechseln mit „Eckentransitivität“

Diese beiden Gleichungen ergeben in Kombination, dass jede Zahl im Schläfli-Symbol von $\mathbb{S}_{n+1}$ auch im Schläfli-Symbol von $\mathbb{S}_n$ auftreten muss. Ist nun noch das Schläfli-Symbol von $\mathbb{S}_2$ bekannt, welches sich durch schrittweises Ermitteln der ersten vier Simplices als $\{3\}$ feststellen lässt, so ist klar, dass $p_k = 3$ für alle $0 \leq p \leq n-2$ sein muss. Das Schläfli-Symbol des n-Simplex lautet also

$$\{\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{n-1}\}.$$

6.2 Ditop

6.2.1 Definition

Das Ditop („δίτοπον“; von altgr. „δίς“ = „zweifach“ und „τόπος“ = eigentlich „Ort“, „Stelle“, hingegen hier „Seite“, „Fläche“ wie auch in „πολύτοπον“) ist das einfachste abstrakte Polytop. Eine mögliche Definition lautet:

Definition 15 (Ditop)**.** *Das* (-1)*-Ditop* $\mathbb{D}_{-1}$ *entspricht dem Nullpolytop;* $\mathbb{D}_0$ *der Ecke. Für* $n \geq 1$ *gilt:* $f_0(\mathbb{D}_n) = 2$*.*

Auf den Beweis der Wohldefiniertheit soll in diesem und auch in den folgenden Fällen verzichtet werden; er ist für das Ditop trivial und für Hyperkubus sowie Kreuzpolytop weitgehend analog zu dem für den Simplex, lediglich mit noch mehr zu unterscheidenden Fällen.

6.2.2 Kombinatorische Untersuchung

Gemäß (Def. 1b) und (Def. 1d) müssen auch von allen anderen k-Seiten mit $0 < k < n$ genau zwei existieren, wobei für je zwei Seiten A, B von ungleichem Rang gilt $A \nsim B$, d. h. $rang(A) < rang(B) \Rightarrow A \preccurlyeq B$. Abbildung 5 zeigt das Ditop vom Rang 3.

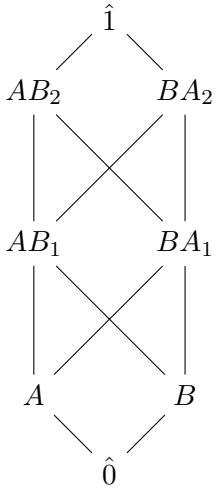

Abbildung 5: Hasse-Diagramm von $\mathbb{D}_3$

Der f-Vektor von $\mathbb{D}_n$ ist also nichts anderes als

$$f(1, \underbrace{2, 2, \ldots 2}_{n}, 1).$$

Das Schläfli-Symbol entspricht

$$\{\underbrace{2, 2, \ldots 2}_{n-1}\}.$$

Weiters gilt für $n \geq 0$, dass $\sigma = 2^n$; für $n = \text{-}1$ natürlich $\sigma = 1$. Zuletzt bedeutet

$$\chi := \sum_{i=0}^{n-1} (\text{-}1)^i f_i,$$

dass

$$\chi = \sum_{i=0}^{n-1} 2(\text{-}1)^i = 1 - (\text{-}1)^n$$

Das Ditop ist ebenfalls nicht nur regulär, sondern auch eckensymmetrisch.

6.3 Hyperkubus

Der Hyperkubus (von altgr. „ὑπερκύβος“ = „Über-Würfel“) ist eine von zwei Familien, zu denen das bereits erwähnte Quadrat, das 4-Eck, gehört.

6.3.1 Definition

Definition 16 (Hyperkubus)**.** $\mathbb{K}$ *ist eine Menge von Polytopen, deren Elemente als* Hyperkuboi *bezeichnet werden. Das Nullpolytop ist der einzige Hyperkubus vom Rang* -1*, die Ecke der einzige Hyperkubus vom Rang* 0*. Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt: Eine zweistellige Relation* $T = (\mathcal{M}, \trianglelefteq)$ *ist genau dann ein* $(n+1)$*-Hyperkubus, wenn ein* n*-Hyperkubus* $\mathbb{K}_n = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$*, eine Partition* $\{\mathcal{M}_\aleph, \mathcal{M}_\sqsupset, \mathcal{M}_\neg, \{X\}\}$ *von* $\mathcal{M}$ *und eine Funktion* $\mathfrak{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{F}$ *existieren, sodass gilt*

1. $\mathfrak{F}$ *ist bijektiv auf* $\mathcal{M}_\aleph \cup \{X\}$*, auf* $\mathcal{M}_\sqsupset \cup \{X\}$*, sowie auf* $\mathcal{M}_\neg \cup \{X\}$*.*
2. *Für alle* $A \in \mathcal{M}$ *gilt* $X \trianglelefteq A$*. Es gilt* $\mathfrak{F}(X) = \hat{0}$*.*
3. *Für alle* $A, B \in \mathcal{M}_\aleph$*,* $A, B \in \mathcal{M}_\sqsupset$ *oder* $A, B \in \mathcal{M}_\neg$ *gilt* $A \trianglelefteq B \iff \mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B)$*.*
4. *Für alle* $A \in \mathcal{M}_\aleph \cup \mathcal{M}_\sqsupset$ *und* $B \in \mathcal{M}_\neg$ *gilt* $A \trianglelefteq B \iff \mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B)$*.*
5. *Für alle* $A \in \mathcal{M}_\aleph$ *und* $B \in \mathcal{M}_\sqsupset$ *gilt* $\neg(A \diamond B)$*.*
6. *Für alle* $A \in \mathcal{M}_\neg$ *und* $B \in \mathcal{M}_\aleph \cup \mathcal{M}_\sqsupset$ *gilt* $\neg(A \trianglelefteq B)$*.*

Bildlich dargestellt bedeutet das, dass der n-Hyperkubus mit Ausnahme seines minimalen Elements „kopiert“ wird, um dann jede Ecke mit ihrer Kopie durch eine Kante, jede Kante mit ihrer Kopie durch eine Fläche, etc., zu verbinden. Als Hasse-Diagramm dargestellt sieht der Hyperkubus $\mathbb{K}_3$ mit den Ecken $\mathcal{F}_0 = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ aus, wie in Abbildung 6 zu sehen.

6.3.2 Kombinatorische Untersuchung

Satz 17. *Es gilt* $f_k(\mathbb{K}_n) = 2^{n-k}\binom{n}{k}$ *für alle* $n \in \mathbb{N} \cup \{\text{-}1\}$ *und alle* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k \leq n$*. Es gilt* $f_{\text{-}1}(\mathbb{K}_n) = 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N} \cup \{\text{-}1\}$*.*

Beweis. Aus der Definition des Hyperkubus folgt, dass

$$f_k(\mathbb{K}_{n+1}) = 2f_k(\mathbb{K}_n) + f_{k-1}(\mathbb{K}_n)$$

für $k > 0$, sowie ergänzend $f_0(\mathbb{K}_{n+1}) = 2f_0(\mathbb{K}_n)$ und $f_{\text{-}1}(\mathbb{K}_{n+1}) = f_{\text{-}1}(\mathbb{K}_n)$. Durch kombinatorische Überlegungen lässt sich die Formel

$$f_k(\mathbb{K}_n) = 2^{n-k}\binom{n}{k}$$

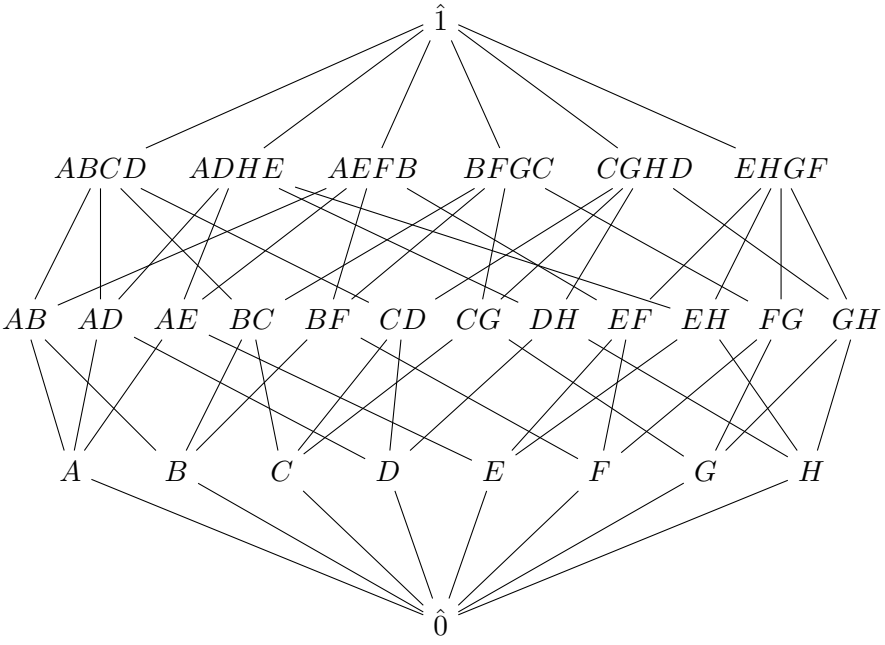

Abbildung 6: Hasse-Diagramm von $\mathbb{K}_3$

finden, welche für $k \geq 0$ gilt und induktiv leicht zu zeigen ist:

$$2^{(n+1)-k}\binom{n+1}{k} = 2 \cdot 2^{n-k}\binom{n}{k} + 2^{n-(k-1)}\binom{n}{k-1}$$

□

Zusammengefasst lässt sich schreiben:

$$f(\mathbb{K}_n) = \left(1,\ 2^n\binom{n}{0},\ 2^{n-1}\binom{n}{1},\ \ldots\ ,\ 2^1\binom{n}{n-1},\ 2^0\binom{n}{n}\right)$$

Wie beim Simplex kann das Schläfli-Symbol des n-Hyperkubus durch rekursive Gleichungen bestimmt werden; hier ist es jedoch am einfachsten, nicht von dem von $\mathbb{K}_2$, welches $\{4\}$ lautet, sondern vom Schläfli-Symbol von $\mathbb{K}_3$, nämlich $\{4,3\}$ auszugehen. Es sei wieder $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-2}\}$ das Schläfli-Symbol von $\mathbb{K}_n = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ und $\{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$ jenes von $\mathbb{K}_{n+1} = (\mathcal{G}_{\aleph} \cup \mathcal{G}_{\sqsupset} \cup \mathcal{G}_{\neg} \cup \{\hat{0}\}, \trianglelefteq)$. Wie bei $\mathbb{S}_n$ lässt durch Betrachtung von $A \trianglelefteq C \trianglelefteq B$ aus der Bijektivität von $\mathfrak{F}_{\aleph}^{-1}$ oder $\mathfrak{F}_{\sqsupset}^{-1}$ die Gleichung

$$p_k = q_k$$

folgern, welche für $0 \leq k \leq n-2$ gilt. Aus der Bijektivität von $\mathfrak{F}_{\neg}^{-1}$ schließlich folgt

$$p_k = q_{k-1},$$

jedoch nicht wie beim Simplex für $1 \leq k \leq n-1$, sondern nur für $2 \leq k \leq n-1$, da hier die Wertemenge von $\mathfrak{F}_{\neg}^{-1}$, nämlich $\mathcal{M}_{\neg} \cup \{X\}$, kein Element vom Rang 0 enthält, dass bei $k = 1$ als A gewählt werden könnte. Es lässt sich aber aus der ersten Gleichung folgern, dass die erste Zahl im Schläfli-Symbol von $\mathbb{K}_n$ sich stets auf die Zahl 4 im Schläfli-Symbol von $\mathbb{K}_3$ (und sogar bis $\mathbb{K}_2$) zurückverfolgen lässt, aus der zweiten Gleichung hingegen, dass alle anderen Zahlen im Schläfli-Symbol von $\mathbb{K}_n$ gleich der zweiten Zahl von $\mathbb{K}_3$ sein müssen. Allgemein angeschrieben ist das Schläfli-Symbol von $\mathbb{K}_n$ demnach nichts anderes als

$$\{4, \underbrace{3, 3, \ldots 3}_{n-2}\}.$$

6.3.3 Hemihyperkubus

Der Hemiyperkubus (von altgr. „ἡμιὑπερκύβος“ = „Halb-Über-Würfel“) kann nicht als eigenständige Polytopfamilie bezeichnet werden. Er zeichnet sich zwar durch seine Regularität aus, existiert jedoch nicht im Rang -1, 0 oder 1. Vielmehr lässt sich aus jedem Hyperkubus von größerem Rang als 1 durch Reduktion um die Hälfte der Seiten ein passender Halb-Hyperkubus bilden.

6.3.3.1 Definition

Zur Definition des Hemihyperkubus wird eine Permutation $\mathfrak{A}$ auf der Menge der Seiten des Hyperkubus eingeführt. Auch sie wird rekursiv definiert. Es sei darum $\mathbb{K}_n = (\mathcal{F}(\mathbb{K}_n), \preccurlyeq)$ und $\mathbb{K}_{n+1} = (\mathcal{G}, \trianglelefteq) = (\mathcal{G}_\aleph \cup \mathcal{G}_\sqsupset \cup \mathcal{G}_\neg \cup \{\hat{0}\}, \preccurlyeq)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei also $\mathfrak{A}_n : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ und $\mathfrak{A}_{n+1} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, sodass gilt:

1. $\mathfrak{A}_{n+1} : A \mapsto \mathfrak{F}_\sqsupset^{-1}(\mathfrak{A}_n(A))$ auf $\mathcal{G}_\aleph$
2. $\mathfrak{A}_{n+1} : A \mapsto \mathfrak{F}_\aleph^{-1}(\mathfrak{A}_n(A))$ auf $\mathcal{G}_\sqsupset$
3. $\mathfrak{A}_{n+1} : A \mapsto \mathfrak{F}_\neg^{-1}(\mathfrak{A}_n(A))$ auf $\mathcal{G}_\neg$
4. $\mathfrak{A}_{n+1} : A \mapsto A$ auf $\{\hat{0}\}$

Ergänzend wird verlangt, dass $\mathfrak{A}_0 = \mathrm{id}$.

Diese Funktion $\mathfrak{A}$ ordnet, da sie involutiv ist, alle Elemente von $\mathcal{F}$ in Paaren an, mit Ausnahme von $\hat{0}$ und $\hat{1}$, welche Fixpunkte sind. Wie sich induktiv leicht zeigen lässt, ist sie auch eine Symmetrie, das heißt $A \preccurlyeq B \iff \mathfrak{A}(A) \preccurlyeq \mathfrak{A}(B)$. Als solche entspricht sie übrigens geometrisch interpretiert der Punktspiegelung am Mittelpunkt, bildet also jede Seite auf die ihr gegenüberliegende ab. Um $\mathfrak{A}_n$ einen Namen zu geben, sei die Funktion daher als die *Inversion* von $\mathbb{K}_n$ benannt.

Nun kann der Hemihyperkubus definiert werden.

Definition 18 (Hemihyperkubus)**.** *Es sei $\mathbb{K}_n = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ der n-Hyperkubus mit den uneigentlichen Seiten $\hat{0}$ und $\hat{1}$, und $\mathfrak{A}$ seine Inversion. Es sei nun $\mathcal{G}$ eine Teilmenge von $\mathcal{F}$, sodass $\hat{0}, \hat{1} \in \mathcal{G}$, wobei für jede eigentliche Seite A von $\mathbb{K}_n$ gilt $A \in \mathcal{G} \oplus \mathfrak{A}(A) \in \mathcal{G}$. Ist nun $T = (\mathcal{G}, \trianglelefteq)$ ein Polytop, sodass für alle $A, B \in \mathcal{G}$ gilt*

$$A \trianglelefteq B \iff A \preccurlyeq B \vee A \preccurlyeq \mathfrak{A}(B),$$

so ist T der n-Hemihyperkubus $\mathbb{H}_n$.

Das Hasse-Diagramm des 3-Hemihyperkubus ist in Abbildung 7 dargestellt. Dabei wurden die Seiten derart angeordnet, dass die Verwandtschaft zum Hyperkubus deutlich werden soll.

6.3.3.2 Kombinatorische Untersuchung

Lemma 19. *Es seien $\mathbb{K}_n = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ ein Hyperkubus, $\mathfrak{A}$ seine Involution und $A, B \in \mathcal{F}$ zwei seiner Seiten. Dann gilt*

$$A \preccurlyeq B \wedge A \preccurlyeq \mathfrak{A}(B) \Rightarrow A = \hat{0}$$

sowie

$$A \preccurlyeq B \wedge \mathfrak{A}(A) \preccurlyeq B \Rightarrow B = \hat{1}$$

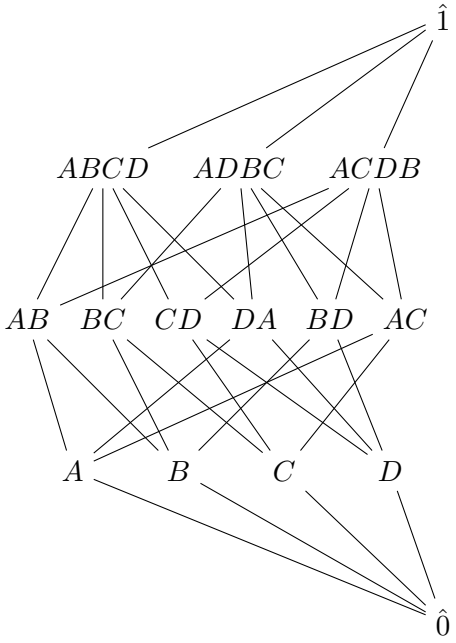

Abbildung 7: Hasse-Diagramm von $\mathbb{H}_3$

Der Beweis erfolgt wie fast immer durch Induktion nach n sowie durch Fallunterscheidung bezüglich der Zugehörigkeiten von A und B zu $\mathcal{F}_{\aleph}$, $\mathcal{F}_{\sqsupset}$ und $\mathcal{F}_{\neg}$. Er ist leicht zu finden und soll hier übersprungen werden.

Der f-Vektor von $\mathbb{H}_n$ kann leicht ermittelt werden, da die Funktion $\mathfrak{A}$ alle eigentlichen Seiten von $\mathbb{K}_n$ in Paare einteilt und der Hemihyperkubus von jedem Paar genau eine Seite mit dem Hyperkubus gemeinsam hat. Daher besitzt der n-Hemihyperkubus genau halb so viele Seiten jeden Rangs außer -1 und n wie der n-Hyperkubus. Es gilt:

$$f(\mathbb{H}_n) = \left(1,\ 2^{n-1}\binom{n}{0},\ 2^{n-2}\binom{n}{1},\ \dots\ ,\ 2^1\binom{n}{n-2},\ 2^0\binom{n}{n-1},\ 1\right)$$

Auch das Schläfli-Symbol des Hemihyperkubus lässt sich aus dem des Hyperkubus ableiten: Es sei $A \trianglelefteq C \trianglelefteq B$ und $A \preccurlyeq B$ mit den Rängen $k-1$, k und $k+2$. Dann gilt (mindestens) eines der folgenden Paare von äquivalenten Aussagen:

$$A \preccurlyeq C \preccurlyeq B \iff \mathfrak{A}(A) \preccurlyeq \mathfrak{A}(C) \preccurlyeq \mathfrak{A}(B)$$

$$A \preccurlyeq \mathfrak{A}(C) \preccurlyeq B \iff \mathfrak{A}(A) \preccurlyeq C \preccurlyeq \mathfrak{A}(B)$$

Sollte für jedes C genau eins von beiden gelten, so existiert also zu jedem C von $\mathbb{H}_n$ mit $A \trianglelefteq C \trianglelefteq B$ genau ein D von $\mathbb{K}_n$ mit $A \preccurlyeq D \preccurlyeq B$, sei es C oder $\mathfrak{A}(C)$. Es gilt demnach $p_k(\mathbb{H}_n) = p_k(\mathbb{K}_n)$. Gilt jedoch für ein C beides, so folgt aus $A \preccurlyeq C$ und $A \preccurlyeq \mathfrak{A}(C)$ nach Lemma 19, dass $A = \hat{0}$ sowie aus $C \preccurlyeq B$ und $\mathfrak{A}(C) \preccurlyeq B$, dass $B = \hat{1}$. In diesem Fall gilt aber natürlich sowohl $A = \hat{0} \preccurlyeq C \preccurlyeq \hat{1} = B$ als auch $A = \hat{0} \preccurlyeq \mathfrak{A}(C) \preccurlyeq \hat{1} = B$ für alle C. Deshalb existieren dann zu jedem C von $\mathbb{H}_n$ mit $A \trianglelefteq C \trianglelefteq B$ genau zwei D von $\mathbb{K}_n$ mit $A \preccurlyeq D \preccurlyeq B$, es gilt also $p_k(\mathbb{H}_n) = \frac{p_k(\mathbb{K}_n)}{2}$.

Klarerweise tritt der zweite Fall, also $A = \hat{0}, B = \hat{1}$ genau dann ein, wenn $n = rang^*(\hat{1}) = k+2 = rang^*(\hat{0}) + 3 = 2$. In allen anderen Rängen als 2 aber gleicht das Schläfli-Symbol des Hemihyperkubus darum jenem des Hyperkubus:

Rang n	Schläfli-Symbol von $\mathbb{H}_n$
$n = 2$	$\{2\}$
$n = 3$	$\{4, 3\}$
$n = 4$	$\{4, 3, 3\}$
$\vdots$	$\vdots$
$n \geq 3$	$\{4, \underbrace{3, 3, \ldots 3}_{n-2}\}$

Der 2-Hemihyperkubus entspricht übrigens dem 2-Digon, das heißt $\mathbb{H}_2 = \mathbb{D}_2$.

6.4 Kreuzpolytop

Das Kreuzpolytop ist dem Hyperkubus sehr ähnlich: Nicht nur ist das Quadrat gleichzeitig das zweidimensionale Kreuzpolytop (es gilt also $\mathbb{X}_2 = \mathbb{K}_2$), die beiden Familien stehen auch in einer Beziehung, die als *Dualität* bezeichnet wird.

6.4.1 Definition

Definition 20 (Kreuzpolytop)**.** *$\mathbb{X}$ ist eine Menge von Polytopen, deren Elemente als* Kreuzpolytope *bezeichnet werden. Das Nullpolytop ist das einzige Kreuzpolytop vom Rang* -1*, die Ecke das einzige Kreuzpolytop vom Rang* 0*. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Eine zweistellige Relation $T = (\mathcal{M}, \trianglelefteq)$ ist genau dann ein $n+1$-Kreuzpolytop, wenn ein n-Kreuzpolytop $\mathbb{X}_n = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$, eine Partition $\{\mathcal{M}_{\aleph}, \mathcal{M}_{\sqsupset}, \mathcal{M}_{\neg}, \{X\}\}$ von $\mathcal{M}$ und eine Funktion $\mathfrak{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{F}$ existieren, sodass gilt*

1. *$\mathfrak{F}$ ist bijektiv auf $\mathcal{M}_{\aleph} \cup \{X\}$, auf $\mathcal{M}_{\sqsupset} \cup \{X\}$, sowie auf $\mathcal{M}_{\neg} \cup \{X\}$.*
2. *Für alle $A \in \mathcal{M}$ gilt $A \trianglelefteq X$. Es gilt $\mathfrak{F}(X) = \hat{1}$.*
3. *Für alle $A, B \in \mathcal{M}_{\aleph}$, $A, B \in \mathcal{M}_{\sqsupset}$ oder $A, B \in \mathcal{M}_{\neg}$ gilt $A \trianglelefteq B \iff \mathfrak{F}(A) \preccurlyeq \mathfrak{F}(B)$.*
4. *Für alle $A \in \mathcal{M}_{\aleph} \cup \mathcal{M}_{\sqsupset}$ und $B \in \mathcal{M}_{\neg}$ gilt $B \trianglelefteq A \iff \mathfrak{F}(B) \preccurlyeq \mathfrak{F}(A)$.*
5. *Für alle $A \in \mathcal{M}_{\aleph}$ und $B \in \mathcal{M}_{\sqsupset}$ gilt $\neg(A \diamond B)$.*
6. *Für alle $A \in \mathcal{M}_{\neg}$ und $B \in \mathcal{M}_{\aleph} \cup \mathcal{M}_{\sqsupset}$ gilt $\neg(B \trianglelefteq A)$.*

Hier wird zunächst der Rumpf des n-Kreuzpolytops entfernt, um dann zwei neue Ecken hinzuzufügen. Diese werden daraufhin wie schon beim Simplex mit jeder der alten Seiten durch eine weitere von um 1 höherem Rang verbunden (nicht jedoch mit einander). Schließlich wird ein neuer Rumpf (klarerweise vom Rang $n+1$) eingesetzt. Das Hasse-Diagramm des Kreuzpolytops $\mathbb{X}_3$ mit den Ecken $\mathcal{F}_0 = \{A, B, C, D, E, F\}$ ist als Abbildung 8 dargestellt.

6.4.2 Dualität zum Hyperkubus

Es zeigt sich, dass die rekursiven Definitionen von Hyperkubus und Kreuzpolytop eine interessante Ähnlichkeit aufweisen, nämlich unterscheiden sie sich genau durch die Ausrichtung der Relationen. Das soll heißen, würde man durchgängig $\preccurlyeq$ und $\trianglelefteq$ durch $\succcurlyeq$ bzw. $\trianglerighteq$ ersetzen (und also auch $\hat{0}$ mit $\hat{1}$ ihrer Definition gemäß vertauschen), so erhielte man die eine Konstruktionsvorschrift aus der anderen. Da natürlich $\mathbb{K}_{-1} = \mathbb{X}_{-1}$ sowie $\mathbb{K}_0 = \mathbb{X}_0$ gilt und eine Umkehrung der Halbordnungsrelation diese primitiven Polytope in sich selbst überführt, gilt auch für alle weiteren n, dass sich, wird die Halbordnung von $\mathbb{K}_n$ umgekehrt, $\mathbb{X}_n$ ergibt (und ebenso anders herum).

Diese sehr ungenau formulierte Erkenntnis soll nun exakter gefasst werden:

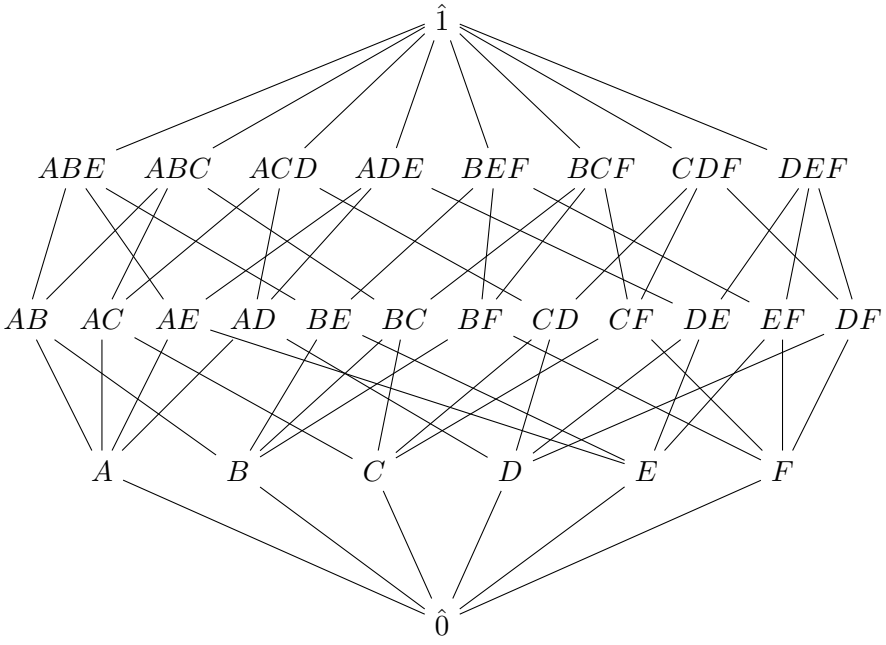

Abbildung 8: Hasse-Diagramm von $\mathbb{X}_3$

Satz 21 (Existenz eines dualen Polytops)**.** *Sei $P = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ ein Polytop vom Rang n und $\trianglelefteq$ eine Relation auf $\mathcal{F}$, sodass für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt: $A \preccurlyeq B \iff B \trianglelefteq A$. Dann ist $Q = (\mathcal{F}, \trianglelefteq)$ ebenfalls ein Polytop.*

Definition 22 (Dualität)**.** *Es sei $P = (\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ ein Polytop. Dann heiße das Polytop $Q = (\mathcal{F}, \trianglelefteq)$ mit $A \preccurlyeq B \iff B \trianglelefteq A$ für alle $A, B \in \mathcal{F}$* dual *zu P.*

Informell kann auch wie vorhin, statt $\trianglelefteq$ zu definieren, „$\succcurlyeq$“ geschrieben werden: $(\mathcal{F}, \preccurlyeq) \cong (\mathcal{F}, \succcurlyeq)$. P wird algebraisch als *antiisomorph* zu Q bezeichnet.

Satz 23. *Es sei P ein Polytop vom Rang n und Q das zu P duale Polytop. Dann hat Q ebenfalls den Rang n. Weiters gilt*

$$f(Q) = (f_n(P), f_{n-1}(P), \ldots, f_0(P), f_{-1}(P)).$$

Sei $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-2}\}$ das Schläfli-Symbol von P. Dann ist das Schläfli-Symbol von Q:

$$\{p_{n-2}, p_{n-1}, \ldots, p_0\}$$

Schließlich gilt $\sigma(Q) = \sigma(P)$.

Die Beweise für die Sätze 21 und 23 sind unschwer aus den Definitionen in Kapitel 2 und 3 abzuleiten.

Alle Polytope, nicht etwa nur reguläre, haben also ein duales Polytop. Manche sind dabei zu sich selbst dual, so der Simplex und das Ditop jeden Ranges sowie alle Polytope von kleinerem Rang als drei. Stellt man übrigens das Hasse-Diagramm eines Polytops einfach auf den Kopf, erhält man das Hasse-Diagramm des dualen Polytops.

6.4.3 Kombinatorische Untersuchung

Ob aus der Dualität zum Hyperkubus oder wiederum aus der Rekursion, welche hier lautet

$$f_k(\mathbb{X}_{n+1}) = f_k(\mathbb{X}_n) + 2f_{k-1}(\mathbb{X}_n)$$

für $k < n$, sowie $f_n(\mathbb{K}_{n+1}) = 2f_{n-1}(\mathbb{K}_n)$ und $f_{n+1}(\mathbb{K}_{n+1}) = 1$, auf jedem der Wege lässt sich die folgende Formel, gültig für $k < n$, finden:

$$f_k(\mathbb{X}_n) = 2^{k+1}\binom{n}{k+1}$$

Es gilt also:

$$f(\mathbb{X}_n) = \left(2^0\binom{n}{0},\ 2^1\binom{n}{1},\ \ldots,\ 2^{n-1}\binom{n}{n-1},\ 2^n\binom{n}{n},\ 1\right)$$

Weiters lässt sich das Schläfli-Symbol ableiten:

$$\{\underbrace{3, 3, \ldots 3}_{n-2}, 4\}.$$

6.4.4 Hemikreuzpolytop

Analog zum Hyperkubus lässt sich auch beim Kreuzpolytop eine Inversion $\mathfrak{A}$ finden und mithilfe dieser eine Halbierung definieren. Dadurch entsteht das Hemikreuzpolytop, natürlich nichts anderes als der duale Hemihyperkubus. Es liegt nahe zu behaupten, Hyperkubus und Kreuzpolytop seien in gewisser Weise dasselbe Objekt, lediglich von verschiedenen Seiten betrachtet. In der Repräsentation durch das Hasse-Diagramm kann das dann sogar wörtlich genommen werden.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Diese Arbeit dient nicht dem Beweis eines einzigen Satzes, zu dem alle anderen Sätze und Lemmata hinführen, sondern enthält mehrere voneinander unabhängige Sätze und Resultate, die jeweils in eigenen Kapiteln behandelt werden. Nur einer von diesen betrifft allgemein alle regulären Polytope (und sogar die nicht regulären): Satz 21 über die Existenz eines dualen Polytops. Nicht viel gibt es sonst auf dem grundlegenden Niveau dieser Arbeit festzustellen, was für alle regulären Polytope gleichermaßen gilt, darum wendet sie sich dann Spezialfällen zu.

Die erste Art von behandelten Spezialfällen ergibt sich dadurch, dass der Rang der zu untersuchenden Polytope als gegeben angenommen wird. Vom Rang -1 bis 1 existieren ohnehin nur insgesamt drei Polytope, was argumentativ begründet wird. Die gefundenen Polytope werden durch ihre Hasse-Diagramme anschaulich angegeben. Vom Rang 2 existieren unendlich viele Polytope, die aber durch die Gemeinsamkeiten in ihrer Struktur dennoch erschöpfend behandelt werden können. In Rang 3 ist dies nicht mehr möglich, was die Untersuchung interessanter macht. Hier sind ebenso unendlich viele Polytope möglich, die jedoch grundverschiedene Strukturen aufweisen. Markante Eigenschaften derer werden daher durch die in Kapitel 3 definierten Charakteristika beschrieben und zueinander in Beziehung gesetzt. Für Rang 4 ist schließlich mit der für Rang 3 verwendeten simplen Methode des Zählens von Ketten nicht mehr möglich, verwertbare Gleichungen aufzustellen.

Die zweite Art von Spezialfällen ist durch eine Annahme der genau umgekehrten Art gegeben: Hier ist in gewisser Weise alles mit Ausnahme des Ranges bekannt, das soll heißen, es werden allgemeine Aussagen über eine Gruppe von Polytopen getroffen, in der von jedem Rang genau eines existiert. Diese Polytopfamilien werden zunächst definiert, dann in Hinsicht auf die Eigenschaften aus Kapitel 3 untersucht. Am Simplex werden exemplarisch all jene Beweise durchgeführt, welche für eine exakte Wohldefinition eigentlich für alle der Polytopfamilien notwendig wären, jedoch in dieser Arbeit keinen Platz finden. Besondere Eigenschaften, wie die Eckensymmetrie des Simplicis und die Dualität von Hyperkubus und Kreuzpolytop, werden behandelt.

Anhang A

Quellenverzeichnis

秋山仁 und 佐藤郁郎 (2011). The element number of the convex regular polytopes. *Geometriae Dedicata*, 151, S. 269–278.

Araujo-Pardo, Gabriela, Maria Del Río-Francos, Mariana López-Dudet, Deborah Oliveros und Egon Schulte (2010). The graphicahedron. *European Journal of Combinatorics*, 31.7, S. 1868–1879.

Baron, Gerd und Peter Kirschenhofer (1992). *Einführung in die Mathematik für Informatiker*. Hrsg. von Gerhard-Helge Schildt (2. Auflage). Band 1. New York: Springer-Verlag.

Birkhoff, Garrett (1967). *Lattice Theory*. Bd. 25. American Mathematical Society colloquium publications. Providence: American Mathematical Society.

Cauchy, Augustin-Louis (1813). Recherches sur les polyédres : Premier mémoire. *Journal de l'École polytechnique*, IX, S. 7–25.

Coxeter, H. S. M. (1948). *Regular Polytopes*. London: Methuen & Co. Ltd.

餘文卿 und 張守德 (2010). *A Course on Abstract Algebra*. 新加坡: World Scientific.

Εὐκλείδης (um 300 v.Chr.). Στοιχεῖα (Manuskript MS D'Orville 301). الإسكندرية.

Kager, Irmgard (1992). Regelmäßige Körper im R_n, $n = 2, 3, 4, 5$. Diss. Wien: Universität Wien.

McMullen, Peter und Egon Schulte (2002). *Abstract Regular Polytopes*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mixer, Mark (2009). *Introduction to abstract polytopes*. Boston: Northeastern University.

Pinter, Silvia Maria (1997). Konvexe reguläre Polytope. Diss. Salzburg: Universität Salzburg.

Pisanski, Tomaž, Egon Schulte und Asia Ivić Weiss (2012). On the Size of Equifacetted Semi-regular Polytopes. *Glasnik Matematicki*, 47.2, S. 421–430.

Poincaré, Henri (1893). Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres. *C. r. hebd. séances Acad. sci.*, 117, S. 144–145.

Scharlau, Rudolf (2012). *Diskrete Geometrie*. Dortmund: TU Dortmund.

Schläfli, Ludwig (1901). *Theorie der vielfachen Kontinuität. Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Basel: Zürcher & Furrer.

Ziegler, Günter M. (1995). *Lectures on Polytopes*. New York: Springer-Verlag.

Anhang B

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: *Hasse-Diagramm des Nullpolytops*. Eigene Arbeit 16
Abbildung 2: *Hasse-Diagramm der Ecke*. Eigene Arbeit 16
Abbildung 3: *Hasse-Diagramm der Kante*. Eigene Arbeit 17
Abbildung 4: *Hasse-Diagramm von* $\mathbb{S}_3$. Eigene Arbeit 25
Abbildung 5: *Hasse-Diagramm von* $\mathbb{D}_3$. Eigene Arbeit 27
Abbildung 6: *Hasse-Diagramm von* $\mathbb{K}_3$. Eigene Arbeit 29
Abbildung 7: *Hasse-Diagramm von* $\mathbb{H}_3$. Eigene Arbeit 31
Abbildung 8: *Hasse-Diagramm von* $\mathbb{X}_3$. Eigene Arbeit 33